

### Vorläufige Mitteilungen.

*Die Redaktion hält sich für den Inhalt der **Vorläufigen Mitteilungen** nicht verantwortlich. Sie behält es sich vor, die Veröffentlichung von der bereits erfolgten Annahme der ausführlichen Darstellung durch eine Fachzeitschrift abhängig zu machen. Die Vorläufigen Mitteilungen sollen nicht mehr als zwei Druckseiten beanspruchen.*

## Mengentheoretische Untersuchung von Eigenschaften der Zahlenreihe.

Von

Willy Feller und Erhard Tornier, Kiel<sup>1</sup>.

Zweck der Untersuchung ist, in möglichster Allgemeinheit diejenigen Klassen von Teilmengen der natürlichen Zahlen (oder der ganzen Ideale eines Zahlkörpers) zu bestimmen, die eine Dichte besitzen. Zu diesem Zwecke werden die Zahlen formal als unendliche Primzahlzerlegungen  $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} p_3^{\lambda_3} \dots$  dargestellt, wobei  $p_i$  die  $i$ -te Primzahl bedeutet ( $\lambda_i \geq 0$ ). Der Zahlbereich wird zu einem Baireschen Nullraum erweitert, indem man alle unendlichen Folgen von Symbolen

$$e_1^{(\lambda_1)} e_2^{(\lambda_2)} e_3^{(\lambda_3)} \dots$$

mit nicht negativen ganzen  $\lambda_i$  als Punkte auffaßt. Den Zahlen entsprechen eineindeutig die Punkte, bei denen nur endlich viele obere Indizes von Null verschieden sind. Wir nennen diese Punkte schlechthin „Zahlen“. Es wird nun für diesen Raum ein Analogon zur Lebesgueschen Maßtheorie entwickelt, indem man den „Grundmengen“, d. h. der Gesamtheit aller Punkte, die mit demselben Anfangsabschnitt

$$e_1^{(\lambda_1)} e_2^{(\lambda_2)} \dots e_n^{(\lambda_n)}$$

beginnen, Zahlen (Maße) zuordnet, welche Zuordnung bloß 2 Axiomen genügen muß. Ferner wird eine Inhaltstheorie relativ zu einem beliebig vorgegebenen Mengenkörper entwickelt. Es wird von einer beliebigen (aber festen) Maßbestimmung ausgegangen: wie dieselbe für zahlentheoretische Anwendungen gewählt wird, soll gleich gesagt werden.

Die Zahlen werden in einer Matrix angeordnet, indem man in die  $i$ -te Zeile der  $k$ -ten Spalte das Symbol  $e_i^{(\lambda)}$  schreibt, wenn  $k$  genau durch  $p_i^\lambda$  teilbar ist („genau“ teilbar heißt: teilbar durch  $p_i^\lambda$ , nicht aber durch  $p_i^{\lambda+1}$ ; für  $\lambda = 0$ : nicht durch  $p_i$  teilbar). Wir sagen, daß die  $k$ -te Spalte die Zahl  $k$  darstellt. Es werden allgemeinere Matrizen betrachtet, deren Spalten beliebige Punkte des Raumes darstellen, d. h. es wird erlaubt, daß sich in einer Spalte unendlich viele Symbole  $e_i^{(\lambda)}$  mit  $\lambda \neq 0$  befinden. Eine Menge  $\mathfrak{A}$  des Raumes heißt in der  $k$ -ten Spalte vertreten, wenn diese einen Punkt aus ihr darstellt. Unter der Dichte der Menge  $\mathfrak{A}$  in einer Matrix verstehen wir die Dichte der Spalten, in denen sie vertreten ist, falls diese Dichte existiert. Der Raum und die Matrizen heißen einander zugeordnet.

Die Gesamtheit aller zugeordneten Matrizen wird nun schrittweise eingeschränkt. Zunächst wird gefordert (der Raum und die Maßbestimmung fest gegeben gedacht), daß die Grundmengen in den Matrizen eine Dichte besitzen, die gleich ist ihrem Maß. Diese Forderung legt die „erste Äquivalenzklasse“ der Matrizen fest. Die Grundmenge  $e_1^{(\lambda_1)} e_2^{(\lambda_2)} \dots e_n^{(\lambda_n)}$  umfaßt die und nur die Zahlen, die „genau“ durch  $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}$  teilbar sind. Für zahlentheoretische Zwecke wird demnach die Maßbestimmung so eingerichtet, daß die Grundmengen als Maß die Dichte

<sup>1</sup> Die ausführliche Darstellung erscheint unter dem Titel: 1. Maß- und Inhaltstheorie des Baireschen Nullraums. 2. Mengentheoretische Untersuchung von Eigenschaften der Zahlenreihe, in den Math. Annalen.

der in ihnen enthaltenen Zahlen in der Zahlenreihe zugeordnet erhalten. Dann umfaßt die erste Äquivalenzklasse die Zahlenmatrix. Für die Theorie empfiehlt es sich aber, von diesen Größenbeziehungen keinen Gebrauch zu machen, damit alle Zahlkörper und noch andere Bereiche gleichzeitig erledigt werden.

Nun wird gezeigt, daß alle gleichzeitig offene und abgeschlossene Mengen in allen Matrizen der ersten Äquivalenzklasse Dichten besitzen, die gleich sind ihrem Maß. Diese Mengen bilden den Körper  $K_1$ . Aus allgemeinen Gründen folgt, daß immer, wenn die Mengen eines Körpers  $K$  Dichten besitzen, dasselbe von allen Mengen gilt, die einen Inhalt in bezug auf  $K$  haben: diese bilden den Körper  $\mathfrak{K}_K$ . Es wird aber auch gezeigt, daß der Körper  $\mathfrak{K}_K$  alle Mengen umfaßt, die in sämtlichen Matrizen der ersten Äquivalenzklasse Dichten besitzen. Da (bei besonderer Maßbestimmung) die Zahlenmatrix in der ersten Äquivalenzklasse enthalten ist, folgt die Existenz der Dichte für alle Zahlenmengen, die in einer Menge aus  $\mathfrak{K}_K$  einbettbar sind, d. h. für die es eine Menge aus  $\mathfrak{K}_K$  gibt, die alle und nur die Zahlen aus ihr enthält. Für diese und nur diese Zahlenfolgen folgt die Existenz der Dichte allein aus der Eigenschaft der Zahlenreihe, daß die durch eine feste Zahl teilbaren Zahlen eine Dichte besitzen.

Will man weitere Mengenklassen mit Dichten finden, so hat man die Gesamtheit der zugelassenen Matrizen einzuschränken, indem man weitere Forderungen stellt, die die Zahlenmatrix erfüllt: je mehr Eigenschaften der Zahlenreihe mitbenutzt werden, für um so mehr Mengen ist die Dichte nachweisbar. Als zweckmäßige Zusatzforderung erweist sich die Eigenschaft der Zahlenreihe, daß die relative Häufigkeit der durch  $a$  teilbaren Zahlen ihren Grenzwert nie übersteigt. Etwas gemildert und allgemeiner gefaßt bestimmt diese Zusatzforderung die zweite Äquivalenzklasse, einen Teilbereich der ersten. Sie ist noch sehr umfassend, enthält die Zahlenmatrix und ist bei keiner erlaubten Maßbestimmung leer. Wiederum findet man einen Körper von Mengen  $K_2$ , für die eine Dichte in allen Matrizen der Klasse existiert, und dasselbe gilt dann wie vorhin auch für die Mengen mit Inhalt in bezug auf  $K_2$ , die einen Körper  $\mathfrak{K}_K$  bilden. So fortschreitend zerpflückt man sozusagen die Eigenschaften der Zahlenreihe und ordnet die Ergebnisse nach den Voraussetzungen, vermöge deren sie wahr sind. Man schränkt die Äquivalenzklassen immer weiter ein, und findet dadurch immer weitere Mengenkörper, für die das Maß und die Dichte in allen Matrizen der betreffenden Klasse übereinstimmen.

Es fällt auch leicht jeweils festzustellen, welche Dichten auf der betreffenden Stufe noch nicht beweisbar sind. So sind z. B. auf der zweiten Stufe — nur diese wird noch ausführlich behandelt — zwar umfangreiche Existenzsätze, aber keine asymptotischen Abschätzungen für den „Fehler“ möglich. Doch fällt es leicht, Äquivalenzklassen anzugeben, in denen es solche Abschätzungen gibt. Auch ist noch z. B. der Dirichlettsche Primzahlsatz falsch, während sich alle Existenzsätze mühelos auf arithmetische (und allgemeinere) Folgen übertragen. Als Beispiel der bereits auf zweiter Stufe beweisbaren Sätze sei angeführt: Alle Zahlenfolgen der Eigenschaft, daß wiederum eine Zahl der Folge entsteht, wenn man in der formal unendlichen Primzahlzerlegung eines ihrer Elemente endlich oft den Exponenten Null durch Eins oder umgekehrt ersetzt, besitzen eine Dichte, und zwar berechnet sich diese mühelos als Maß der entsprechenden Menge im Raume. Hierher gehören z. B. die Zahlen, die durch eine gerade Anzahl von Primzahlquadraten, -kuben usw. (oder keine) teilbar sind.

Die  $K$ -Körper sind immer rein mengentheoretisch definiert, unabhängig von der Maßbestimmung: für sie ergibt sich die Existenz der Dichte rein kombinatorisch aus den Eigenschaften der Matrizen der betreffenden Klasse. (Für die ausführlich allein behandelte zweite Klasse im wesentlichen: Existenz der Dichte für die durch  $a$  teilbaren Zahlen; Annäherung der relativen Häufigkeit an diese Dichte

von unten her.) Die  $\mathbb{R}_K$ -Körper hängen aber von der Maßbestimmung ab (d. h. in unserem Falle: von der Größe der Dichte der durch  $a$  teilbaren Zahlen.)

Alle Ausführungen gelten gleichzeitig für beliebige Zahlkörper endlichen Grades, wenn man an Stelle der Zahlen die nach wachsenden Normen geordneten ganzen Ideale oder Ideale einer Klasse setzt, und übrigens auch für allgemeinere Bereiche.

## Referate.

### Gesamtdarstellungen, Enzyklopädien, Lehrbücher der Mathematik.

**Niggli, Paul:** Reine und angewandte Naturwissenschaft. Naturwiss. 1931 I, 1—8.

● **Mangoldt, H. v.:** Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium. Vollst. neu bearb. u. erw. v. Konrad Knopp. Bd. 1. Zahlen. Funktionen. Grenzwerte. Analytische Geometrie. Algebra. Mengenlehre. 5. u. 6. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1931. XV, 585 S. u. 112 Abb. RM. 20.—.

Die vorliegende neue Auflage des v. Mangoldtschen Buches stellt eine wertvolle Weiterführung durch K. Knopp dar. Das v. Mangoldtsche Wort aus der 1. Auflage: „Auf leichte Verständlichkeit habe ich überall den größten Wert gelegt, aber dabei an Strenge bewußtmaßen nichts nachgegeben“ ist auch bei der Neubearbeitung das Motto geblieben, fast noch in erhöhtem Maße. Dadurch wird von Anfang an der Lernende beinahe unbewußt an ein exaktes mathematisches Denken gewöhnt, wie es im Schulunterricht naturgemäß noch nicht durchführbar, aber für ein tieferes Eindringen in die höheren Gebiete der mathematischen Disziplinen unbedingt erforderlich ist. Im ganzen ist die Stoffverteilung dieselbe geblieben wie in den früheren Auflagen. Die Abschnitte über Permutationen, Kombinationen, Determinanten und analytische Geometrie haben abgesehen von einigen Ergänzungen keine wesentliche Änderung erfahren. Nur ist die kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung fortgeblieben. Dafür ist als wertvolle Bereicherung der 11. Abschnitt über Zahlen- und Punktmengen neu hinzugekommen. Bedeutend erweitert sind die Betrachtungen über die rationalen und irrationalen sowie die komplexen Zahlen und anschließend die über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Damit sind diese Dinge, die der Studierende einmal gründlich durchdenken muß, in vorbildlichster und ästhetisch befriedigender Weise dargestellt. Das Wichtigste der Knoppschen Neubearbeitung aber ist die vertiefte Behandlung des Grenzwertes, der schon am Schluß des Abschnittes über rationale Zahlen durch die Einführung der Nullfolge, der „Keimzelle der Grenzprozesse“ vorbereitet wird. Mit dieser leicht verständlichen und doch durchaus strengen Einführung des Grenzprozesses, der von den verschiedensten Seiten beleuchtet und durch zahlreiche Beispiele immer mehr gefestigt wird, wird eine Kluft überbrückt, die manchem Anfänger zum Verhängnis geworden war. Vom Schulunterricht her — etwa bei der Ausmessung des Kreises oder der Berechnung von  $\sqrt{2}$  oder der Tangenten- definition — war der mit unzulänglichen Mitteln unternommene „Sprung ins Unendliche“ als etwas Geheimnisvolles haften geblieben; und in den einführenden Vorlesungen der Analysis wird mit diesen Dingen als etwas Geläufigem operiert, nachdem meist eine zwar strenge, jedoch mit Rücksicht auf den weiterhin zu behandelnden Stoff nur kurze Begründung gegeben ist. Aber zur Erfassung des Grenzprozesses, dieses Schlüssels für die gesamte Analysis, bedarf es für den Lernenden einer gewissen Zeit! Und bei der Knoppschen Darstellung wird er schrittweise durch eigenes Denken gründlichst mit ihm vertraut gemacht; so dürfte gerade unter diesem Gesichtspunkt die Neubearbeitung des „Mangoldt“ die geeignete Ergänzung zu den Einführungsvorlesungen darstellen. Eine stattliche Reihe von Übungsaufgaben mit Resultatangaben bilden für den Lernenden den Prüfstein des Verständnisses. *G. Wiarda* (Dresden).

● **Bürklen, O. Th.:** Mathematische Formelsammlung. Vollst. umgearb. Neuauflage. Von F. Ringleb. 2., verb. Aufl. (Samml. Göschen. Nr. 51). Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1931. 256 S. u. 38 Abb. geb. RM. 1.80.

Diese 2. Auflage unterscheidet sich von der ersten nicht merklich. Neu aufgenommen wurde ein kurzer Abschnitt über Vektoranalysis und in der analytischen Geometrie der Begriff der homogenen Koordinaten; weiter wurden die astronomischen Daten nach den neuesten Ergebnissen korrigiert. Willkommen ist auch die Erweiterung des Verzeichnisses der wichtigsten Begriffe. Für eine Neuauflage schlagen wir einige Änderungen vor. Seite 111 wird bei den Polarkoordinaten der Radiusvektor  $r$  stets positiv gerechnet, was nicht angeht, da z. B. in der Hyperbelgleichung  $r = p(1 + \varepsilon \cos \varphi)$  für  $\varepsilon > 1$   $r$  auch negative Werte annimmt. Seite 221 hat bei Annahme des Rechtssystems (S. 140) die Torsion falsches Vorzeichen; nebenbeigesagt gehören die Begriffe „Rechts- und Linkssystem“ erwähnt. Die Voraussetzungen für die Para-

meterdarstellung der Flächen S. 224 sind unvollständig und teilweise falsch: so sind z. B. gewisse Zylinder von der Darstellung ausgeschlossen. Die in der Ebene und im Raum behandelte Normalform der Gleichung der Geraden bzw. der Ebene ist veraltet. Sie ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformation, versagt, wenn das Gebilde durch den Ursprung geht, und steht übrigens auch in Widerspruch zu den Festsetzungen zu S. 226. Man vgl. Salmon-Friedler, *Analyt. Geom. des Raumes*, 5. Aufl. 1922, S. 10 u. 28. Im Zusammenhang damit steht, daß der Begriff „orientierte Gerade“ bzw. „orientierte Ebene“ fehlt. Wird in der Determinante des Tetraedervolumens S. 144 die erste Spalte als letzte genommen, so wird die Formulierung für das Vorzeichen des Volumens natürlicher und entspricht auch der Übung. In dem Abschnitt über Vektoren vermissen wir einige Anwendungen, z. B. die Eulersche Formel für die Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers, der sich um eine feste Achse dreht. Auch die sehr nützliche Formel (97) in Salmon-Fiedler S. 62, aus der leicht die Eulersche Formel folgt, könnte aufgenommen werden. Fehlt im Literaturverzeichnis Salmon-Fiedler mit Absicht? Diese kleinen Bemerkungen sollen aber dem bewährten Buche keinen Eintrag tun. *Karl Kommerell (Tübingen).*

## Grundlagenfragen, Logik.

### Allgemeines:

**Hilbert, David:** Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. *Math. Annalen* **104**, 485—494 (1931).

Der Vortrag bringt außer einer kurzen Darstellung des formalistischen Standpunktes und einer Reihe philosophischer und historischer Bemerkungen auch eine wesentliche Ergänzung der bisherigen formalen Ansätze zur Begründung der Zahlentheorie. In dem Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik“, *Math. Ann.* **102**, hatte Hilbert u. a. die Aufgabe gestellt, für den Formalismus der Zahlentheorie folgende beiden die Vollständigkeit des Systems betreffenden Sätze zu beweisen: 1. Wenn eine Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar. 2. Wenn für einen Satz  $\mathcal{S}$  die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für  $\bar{\mathcal{S}}$  die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden. Um zum Beweise dieser beiden Sätze, wenigstens für gewisse Spezialfälle zu gelangen, wird das formale System der Zahlentheorie durch folgende, ihrer Struktur nach ganz neuartige Schlußregel erweitert: Falls nachgewiesen ist, daß die Formel  $A(z)$  allemal, wenn  $z$  eine vorgelegte Ziffer ist, eine richtige numerische Formel wird, so darf die Formel  $(x) A(x)$  als Ausgangsformel angesetzt werden. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die neue Regel wird skizziert. Außerdem ergibt sich unmittelbar, daß in dem erweiterten System für Aussagen der Form  $(x) A(x)$  [wobei  $A(x)$  außer  $x$  keine Variable mehr enthält] Satz 1. und 2. und für Aussagen der Form  $(E x) A(x)$  wenigstens Satz 2. gilt. *K. Gödel (Wien).*

**Hölder, Otto:** Axiome, empirische Gesetze und mathematische Konstruktionen. *Scientia (Milano)* **49**, 317—326 (1931).

Der Verf. geht aus von der Frage nach der logischen Berechtigung der Axiomatisierung der Arithmetik. Er sucht zu einer Klärung zu gelangen, indem er die Arithmetik einerseits mit der Geometrie und der Physik andererseits hinsichtlich der Eigenart ihrer Ausgangssätze und ihrer Begründungsmethoden vergleicht. Hierbei zeigt sich nach Ansicht des Verf., daß gewisse Sätze der Geometrie (Beispiel: Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck) und der Physik (Beispiel: Das Hebelgesetz) sowohl empirisch bestätigt werden können (im geometrischen Falle wenigstens näherungsweise) als auch aus einfacheren Gesetzen logisch deduzierbar sind; diese einfacheren Gesetze seien im Falle der Geometrie die Axiome, im Falle der Physik gewisse Erfahrungssätze. Eine weitere Analogie zwischen Geometrie und Physik findet der Verf. darin, daß in beiden Gebieten zahlreiche Ableitungen der angedeuteten Art sich auf konstruktive Zwischenschritte stützen. Diese Analogien zwischen Geometrie und Physik führen den Verf. zu der Ansicht, daß die Axiome der Geometrie ebenso aus der Erfahrung stammen wie die Sätze, von denen die theoretische Physik bei ihren Ableitungen ausgeht, und daß also in der Geometrie als einem Zweig der angewandten Mathematik gewisse mathematische Konstruktionen an einem Begriffsmaterial vorgenommen werden, das

aus der sinnlichen Erfahrung in die mathematische Überlegung hinübergenommen worden ist. (Die Schlüssigkeit der Überlegungen wird dadurch beeinträchtigt, daß nicht immer scharf zwischen der Geometrie als axiomatisierter mathematischer Disziplin und der physikalischen Geometrie als einer inhaltlich-physikalischen Belegung der Grundbegriffe der axiomatisierten Geometrie unterschieden wird, bzw. dadurch, daß sich der Verf. die Grundbegriffe der Geometrie unausgesprochen von vornherein mit einer bestimmten inhaltlichen Deutungsvorschrift behaftet denkt.) In der Arithmetik dagegen wird dem Verf. zufolge mit rein mathematischen Konstruktionen an einem empiriefreien Material operiert; die sog. Axiome der Arithmetik stellen also keine Ausgangssätze dar, die empirisch geprüft werden können. Sie sind vielmehr bloße formale Beschreibungen gewisser begrifflicher Konstruktionen, wie sie eben im Begründungsverfahren der Arithmetik eine Rolle spielen, und wie sie in der Arithmetik in unendlicher Zahl möglich sind. Aus diesen Gründen hält es der Verf. für richtig, zu sagen, daß die Arithmetik keine Axiome habe. Er zieht noch die Konsequenz für die Frage der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik: Jede metamathematische Betrachtung zur Prüfung der Widerspruchsfreiheit der Mathematik nehme an Hand der Symbolkombinationen, durch die die Formeln der Arithmetik dargestellt würden, wiederum gewisse konstruktive Operationen vor, die nun ihrerseits zur Frage der Widerspruchsfreiheit ebenso Veranlassung gäben wie die Konstruktionen der Arithmetik. Daher seien die metamathematischen Begründungsversuche im Falle der Arithmetik überflüssig: Die Arithmetik könne „nur durch den folgerichtigen Aufbau ihrer Begriffe begründet werden“.

C. G. Hempel (Berlin-Buch).

Curry, H. B.: The universal quantifier in combinatory logic. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 154–180 (1931).

Ausgehend von der logischen Symbolik Schönfinkels (*Math. Ann.* 92) hat der Verf. in seiner Dissertation „Grundlagen der kombinatorischen Logik“ (*Amer. J. Math.* 52) einen Formalismus geschaffen, der die logischen Sachverhalte ohne Unterscheidung von Gattungen und Bereichen und ohne explizite Benutzung der Begriffe Variable, Aussage und Aussagefunktion darzustellen gestattet. Es wird dort dargelegt, inwiefern Schönfinkel dieses schon von ihm gesteckte Ziel nicht erreicht hat; und die aufgewiesenen Mängel werden beseitigt. — Als „nichtformale Grundbegriffe“ erscheinen in der Curryschen kombinatorischen Logik lediglich: „Etwas“ (eine Kategorie), Formel (eine Kategorie), Anwendung (eine Verknüpfung); als „formale Begriffe“ erscheinen: die Gleichheit  $=$ , die Schönfinkelsche Identitäts-, Zusammensetzungs-, Vertauschungs- und Konstanzfunktion (bei Curry mit  $I$  bzw.  $B, C, K$  bezeichnet), die „Wiederholungsfunktion“  $W$ , die Implikation  $P$ , das Allzeichen (quantifier)  $\Pi$  und die Konjunktion. Die Bedeutung dieser individuellen Etwase erhellt aus den zugehörigen „Regeln“, deren wichtigste lauten: „Wenn  $X, Y, Z$  Etwase sind,“ so gilt:

$$\vdash BXYZ = X(YZ), \vdash CXYZ = XZY, \vdash WXY = XYY, \vdash KXY = X, \\ \text{aus } \vdash X, \vdash PXY \text{ folgt } \vdash Y.$$

Außer diesen Regeln werden 16 kombinatorische Axiome zugrunde gelegt; als ein Beispiel sei angeführt:  $BCW = B(B(BW)C)(BC)$ . Sämtliche logischen Sachverhalte erscheinen in der Curryschen Logik in Gestalt einer solchen Kombination der neun formalen Begriffe. Während in den „Grundlagen . . .“ im wesentlichen die Etwase  $B, C, W, K$  den Gegenstand der Betrachtung bilden, werden in der Abhandlung „The universal quantifier . . .“ vor allem die Etwase  $\Pi$  und  $P$  betrachtet. Das Augenmerk richtet C. dabei auf einen Beweis des Substitutionsprinzips aus formal primitiveren Sachverhalten. Das Substitutionsprinzip wird in der Fassung ausgesprochen: „If we have any expression, say  $\mathcal{X}$ , involving variables, say  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , which represents a true statement for all values of these variables, and if we form a new expression, say  $\mathcal{Y}$ , by substituting other expressions which may again involve variables, for one

or more variables in  $\mathfrak{X}$ , or by performing on the variables in  $\mathfrak{X}$  a transformation („Umwandlung“) or by a succession of these processes; then the expression will also represent a true statement for all values of whatever variables appear therein“. Die Darstellung dieses Prinzips in der C.schen Symbolik setzt die folgenden Begriffe voraus. Es gibt sechs bestimmte Typen von Kombinationen der Etwas  $I, B, C, W, K$ , die beim Aufbau der Logik die ausschlaggebende Rolle spielen; eine Kombination von lauter solchen Typen heißt regulärer Kombinator. Für einen solchen wird Ordnung und Grad definiert: „A regular combinator  $U$  shall be said to have the order  $m$  and degree  $n$  if the following equation involving variables holds:  $\vdash Ux_0x_1x_2\dots x_m = x_0y_1y_2\dots y_n$ , where  $y_1, y_2, \dots, y_n$  are combinations of  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .“ Es genügt, das Substitutionsprinzip für reguläre Kombinatoren auszusprechen, etwa so: „Wenn das Etwas  $X$  der Formel  $\vdash \Pi_n X$  genügt und wenn  $U$  ein regulärer Kombinator von der Ordnung  $m$  und vom Grade  $n$  ist, so ist auch  $\vdash \Pi_m(UX)$ .“ Zur Formalisierung dieser Implikation unter Elimination des variablen Etwas  $X$  werden die folgenden Festsetzungen benutzt:

$$(X \cdot Y) \equiv BXY, \quad \Pi_0 \equiv I, \quad \Pi_1 \equiv \Pi, \quad \Pi_{n+1} \equiv \Pi \cdot B \Pi_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\Phi_1 \equiv (B(BW)) \cdot (BC) \cdot (BBBB) \cdot B;$$

$$|P_2 \equiv BBB \Pi_2((\Phi_1 \cdot \Phi_1)P).$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das Substitutionsprinzip in der kombinatorischen Logik formulieren: „If  $U$  is any regular combinator of order  $m$  and degree  $n$ , then the formula

$$\vdash |P_2 \Pi_n(\Pi_m \cdot U)$$

can be proved, provided the transitive property of  $|P_2$  may be used.“ Zum Beweise dieses Satzes werden außer den schon in den „Grundlagen...“ aufgeführten Axiomen weitere fünf Axiome gebraucht, deren kompliziertestes hier in der üblichen Schreibweise angeführt sei:  $(f)(g)\{(x)(f(x) \rightarrow g(x)) \rightarrow ((x)f(x) \rightarrow (x)g(x))\}$ . Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß eine formale Eigenschaft regulärer Kombinatoren,  $\mathfrak{P}(m, n)$ , ( $m, n$  natürliche Zahlen) jedem regulären Kombinator von der Ordnung  $m$  und dem Grade  $n$  zukommt; im zweiten Teile wird die Eigenschaft eines Kombinaturs  $U$ , der Formel  $\vdash |P_2 \Pi_n(\Pi_m \cdot U)$  zu genügen, auf eine solche Eigenschaft zurückgeführt, die das Kriterium erfüllt. — Einige Einzelheiten, über die noch zu berichten wäre, lassen sich nicht ohne genaueres Eingehen auf die Symbolik referieren.

Arnold Schmidt (Göttingen).

**Kuroda, Sigeatsu: Zur Algebra der Logik, III.** (*Math. Inst., Kais. Univ. Tokyo*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 33–36 (1931).

Der Verf. gibt einen neuen Beweis seines Satzes: Ein Element  $A$  vom Multiplikationsgrad  $2^r$  läßt sich eindeutig in der Form darstellen:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_i B_i, \quad \mu = 0 \text{ oder } 1,$$

wobei  $OB = E_0$  gesetzt wird und genau  $r$  Koeffizienten gleich 1 sind.

Walter Dubislav (Berlin-Friedenau).

## Algebra, Gruppen- und Zahlentheorie.

### Allgemeines:

● Schubert, Hermann: Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra. 4. neu bearb. u. erw. Aufl. v. Paul Bernhard Fischer. (Göschens-Samml. Nr. 48.) Berlin: Walter de Gruyter 1931. 139 S. RM. 1.80.

● Schreier, O., und E. Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. Bd. 1. (Hamburg. math. Einzelschr. H. 10.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. 238 S. u. 29 Abb. RM. 8.—

Ausgehend von den Elementen der Theorie der reellen Zahlen wird der  $n$ -dimensionale Raum und der Begriff des Vektors eingeführt. Die einfachsten Verknüpfungsgesetze für Vektoren werden abgeleitet, die ersten Aussagen über lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

gegeben und sodann ausführlich die Theorien der linearen Vektorgebilde, der linearen Räume und der linearen Gleichungen entwickelt. Das Fundament, auf dem diese Paragraphen ruhen, ist der Steinitzsche Austauschsatz: Spannen die Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  das lineare Vektorgebilde  $\mathfrak{L}$  auf und sind  $q$  linear unabhängige Vektoren  $b_1, \dots, b_q$  aus  $\mathfrak{L}$  gegeben, so lassen sich  $q$  der  $p$  Vektoren  $a_1, \dots, a_p$  durch  $b_1, \dots, b_q$  ersetzen, derart, daß diese mit den noch verbleibenden der Vektoren  $a_r$  das ganze Gebilde  $\mathfrak{L}$  aufspannen. Die Theorie der linearen Gebilde auf diesen Satz zu stützen, führte wohl zuerst E. Noether durch; seitdem ist dieser Aufbau auch in die neueren algebraischen Lehrbücher, beispielsweise das von Haupt und v. d. Waerden, übergegangen. Die bekannten Existentialsätze über lineare Gleichungen ergeben sich auf diesem Wege äußerst klar und glatt, besonders auch noch deshalb, weil der Rang einer Matrix als Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen (nicht mit der üblichen Determinantenbedingung) definiert ist. Die einfachsten geometrischen Deutungen (Zusammenhang zwischen den Lösungen linearer Gleichungssysteme und linearen Räumen) beschließen das erste Kapitel über den affinen Raum. Das zweite beginnt mit der Einführung des Euklidischen Abstandsbegriffs, der Länge von Vektoren, dem Winkel zwischen 2 Vektoren und den einfachsten hier gültigen Gesetzen. Sodann wird im Zusammenhang mit der Volumenvorstellung die Determinante als Funktion der Zeilenvektoren axiomatisch durch die 3 bekannten Forderungen eingeführt; nach Feststellung der grundlegenden Eigenschaften werden Existenz und Eindeutigkeit bewiesen, immer unter ausschließlicher Benutzung der Vektorvorstellung, die alle Ableitungen überaus klar macht; die Beziehung der Determinanten zum Volumbegriff wird herausgearbeitet. Es werden dann die Sätze über Addition der Elemente einer Zeile zu den entsprechenden einer andern, die Entwicklungssätze der Determinantentheorie (als Spezialfall die übliche Definition  $\sum \pm a_{1r_1} \dots a_{nr_{r_n}}$  usw., der Multiplikations- und der allgemeine Laplacesche Entwicklungssatz sowie die Anwendung der Determinantentheorie auf lineare Gleichungen gegeben. Nach einem Paragraphen über allgemeine Koordinatentransformationen, Cartesische Koordinatensysteme und orthogonale Matrizen folgt die Konstruktion eines orthogonalen Systems normierter Vektoren, die Bestimmung eines Lotes von einem Punkt auf einen Unterraum, die Hessesche Normalform der Hyperebenengleichung und die Aufstellung gemeinsamer Lote zweier linearer Unterräume. Der dann folgende Paragraph ist dem Studium der Bewegungen gewidmet: Definition, einfachste Eigenschaften und Invarianten werden abgeleitet; es reiht sich an eine ausführliche Klassifikation der Bewegungen im  $R_2$  und  $R_3$  mittels der Untergebilde der invarianten bzw. in ihre entgegengesetzten verkehrten Vektoren. Die affinen Abbildungen beschließen das zweite Kapitel. Spielen die bisherigen Betrachtungen ausschließlich im Gebiet der reellen Zahlen, so wird nun der Körperbegriff axiomatisch allgemein eingeführt. Die ersten Folgerungen der Grundaxiome, die elementaren Rechengesetze, werden entwickelt. Die Theorie des Polynombereiches einer Unbestimmten (im Sinne der abstrakten Algebra) schließt sich an. Dann werden die komplexen Zahlen in üblicher Weise als Zahlenpaare eingeführt; hierbei treten auch einfache Grenzbetrachtungen auf, die zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra (im klassisch-funktionentheoretischen Sinn) überleiten. Es ist der ohne eigentlich funktionentheoretische Begriffsbildungen im wesentlichen mit Stetigkeitsschlüssen operierende Gedanke durchgeführt, daß die untere Grenze der absoluten Beträge der Polynomwerte angenommen wird und gleich Null sein muß, weil sich andernfalls eine Stelle mit noch kleinerem Absolutwert des Polynoms angeben ließe. Den einzelnen Paragraphen sind zahlreiche, größtenteils wesentliche Dinge und nicht nur ad hoc konstruierte Beispiele behandelnde Aufgaben beigelegt. *Grell.*

**Petr, Napsal K.:** Über die Definition der Determinante. Čas. mat. a fys. 60, 201 bis 212 (1931) [Tschechisch].

L'auteur propose de baser la théorie des déterminants sur la considération du déterminant comme fonction alternante  $m$ -linéaire de  $m$  séries de variables; il appuie cette proposition par plusieurs exemples de démonstrations de théorèmes sur les déterminants.

*Autoreferat*

**Aitken, A. C.:** Note on a special persymmetric determinant. Ann. of Math., II. s. 32, 461—462 (1931).

Der Verf. gibt einen kurzen und eleganten Beweis für die Entwicklung in Form eines Produktes der speziellen persymmetrischen Determinante, deren Elemente die Summen der verschiedenen Potenzen der  $p$  ersten natürlichen Zahlen sind. Diese Entwicklung wurde bereits 1903 von K. Petr, aber auf komplizierterem Wege bewiesen. Der Beweis beruht auf der Darstellung der fraglichen Determinante als Produkt zweier Matrizen, die sich alsdann so transformieren lassen, daß bei der nachherigen Produktbildung sich die  $p$  enthaltenden Faktoren abspalten. Die Elemente der persymmetrischen Determinante, die übrigbleibt, sind die Reziproken der natürlichen Zahlen. Auf Grund eines allgemeinen Resultates von Cauchy läßt sich endlich auch diese Determinante auswerten.

*F. Bohnenblust (Princeton N. J.).*

**Coxeter, H. S. M.:** Groups whose fundamental regions are simplexes. (Prelim. note.) J. Lond. math. Soc. 6, 132—136 (1931).

Diese Note enthält die Resultate einer Untersuchung über diskrete Bewegungsgruppen im  $m$ -dimensionalen sphärischen bzw. euklidischen Raum, die Fundamentalbereiche von simplizialer Form haben. In übersichtlicher Schreibweise gibt der Verf. eine Klassifikation aller in Betracht kommenden Fundamentalbereiche und Gruppen. Er gibt Zusammenhänge an mit bekannten Resultaten über Polytope.

*Van Kampen* (Den Haag).

**Todd, J. A.:** The groups of symmetries of the regular polytopes. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 212—231 (1931).

Verf. untersucht die Bewegungs- und Spiegelungsgruppen der regulären Polytope in  $n$  Dimensionen. Um diese Gruppen zu erhalten, projiziert man das Polytop vom Zentrum seiner umschriebenen Hypersphäre auf diese und teilt die so erhaltenen Polygone von ihrem Mittelpunkt aus in Großkreissimplices ein. Das Studium der Bewegungen dieser Dreiecke liefert für die Bewegungsgruppe  $n-1$ , für die durch Spiegelung erweiterte Gruppe  $n$  erzeugende Operationen. Die Bewegungsgruppe kann geometrisch durch die Spiegelung der Simplices an ihren Rändern erzeugt werden. Die Anzahl dieser erzeugenden Operationen kann auf 2 reduziert werden außer im Falle des Polytopes  $\{3, 4, 3\}$ , wofür gezeigt wird, daß man deren 3 nötig hat. Zum Schluß wird noch der Grad der erzeugenden Operationen in den verschiedenen Fällen angegeben.

*J. J. Burckhardt* (Basel).

**Miller, G. A.:** Groups generated by two operators whose squares are invariant. Bull. amer. math. Soc. 37, 270—275 (1931).

Verf. untersucht Gruppen, die durch 2 Elemente  $\delta, t$  erzeugt werden, deren Quadrate im Zentrum liegen. Eine solche Gruppe  $\mathfrak{G}$  enthält einen Normalteiler  $\mathfrak{H}$ , der durch  $\delta^2, t^2$  und  $\delta \cdot t$  erzeugt wird und Abelsch ist.  $\mathfrak{H}$  ist entweder gleich  $\mathfrak{G}$  oder vom Index 2 in  $\mathfrak{G}$ . Dafür daß  $\mathfrak{H}$  gleich  $\mathfrak{G}$  ist, ist notwendig und hinreichend, daß seine zu 2 gehörige Sylowgruppe zyklisch ist und der Rang der anderen Sylowgruppen  $\leq 2$ . Man kann ferner Abelsche Gruppen  $\mathfrak{H}$  von ungrader Ordnung und einem Rang  $\leq 3$  durch ein Element der Ordnung 2 zu einer der im Titel genannten Gruppen erweitern. Verf. berechnet die Anzahlen aller derartigen Gruppen, die spezielle Untergruppen enthalten.

*St. Pietrkowski* (Göttingen).

**Waerden, B. L. van der:** Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der symmetrischen und der linearen Gruppe. (Nachtrag zu meiner Arbeit in diesem Band, S. 92—95.) Math. Annalen 104, 800 (1931).

**Bays, S.:** Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour  $N$  premier (ou puissance de nombre premier) de la forme  $6n+1$ . II.—III. Commentarii math. helvet. 3, 22—41 (1931).

Unter einem Dreiersystem von Steiner für die ganze Zahl  $N$  versteht man ein System von Tripeln von Resten mod  $N$ , derart, daß jedes Paar von Resten mod  $N$  in einem und nur einem Tripel vorkommt. Es läßt sich zeigen, daß ein solches Dreiersystem dann und nur dann existieren kann, wenn  $N$  von der Form  $6n+1$  oder  $6n+3$  ist. Die Hauptfrage, die nun gestellt werden kann, ist die nach der Anzahl wesentlich verschiedener Dreiersysteme, d. h. solcher, die nicht durch eine Permutation der Reste auseinander hervorgehen. Die Frage ist in dieser Allgemeinheit bis heute nicht gelöst. Der Verf. beschäftigt sich nun mit dem speziellen Problem der zyklischen Dreiersysteme, d. h. solcher, die durch die Substitution  $\{x, 1+x\}$  in sich übergehen. Er beschäftigt sich nur mit dem Falle  $N=6n+1$ . Ein Teil seiner Sätze gilt für jedes solche  $N$ , ein Teil für  $N$  = Primzahlpotenz, der wichtigste für  $N$  = Primzahl. Unter einer zyklischen Kolonne versteht man die Gesamtheit der Tripel  $a+x, b+x, c+x$ , wo  $a, b, c$  3 verschiedene Reste mod  $N$  sind,  $x$  alle Reste mod  $N$  durchläuft. Jede zyklische Kolonne besitzt eine konjugierte, die durch die Substitution  $\{x, -x\}$  aus ihr hervorgeht. Jedes Paar von konjugierten zyklischen Kolonnen läßt sich eindeutig durch eine sog. Charak-

teristik kennzeichnen, d. i. ein gewisses System von 3 Resten und  $N$ . Versteht man nun (abweichend vom Sprachgebrauch etwa in Hasse, Algebra) unter der zu  $N$  gehörigen metazyklischen Gruppe die Gruppe der Substitutionen  $\{x, a+bx\}$ , wo  $a$  alle Reste mod  $N$ ,  $b$  alle primen Reste mod  $N$  durchläuft, so gilt: Die metazyklische Gruppe transformiert eine zyklische Kolonne wieder in eine zyklische Kolonne und folglich ein zyklisches Dreiersystem in ein zyklisches Dreiersystem, denn ein solches ist ja, wie man leicht sieht, Vereinigung von fremden Kolonnen. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist nun, daß für  $N = \text{Primzahl}$  die Umkehrung gilt: 2 zyklische Dreiersysteme, die durch eine Permutation auseinander hervorgehen, gehen schon durch eine Substitution der metazyklischen Gruppe auseinander hervor. Der Satz wird in einer Form bewiesen, daß er für jede Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_N)$  gilt, die durch die Substitution  $\{x, x+1\}$ , angewandt auf die Indizes, invariant bleibt. Vermutet wird der Satz schon für jedes  $N$  der Form  $6n+1$ . Der Verf. untersucht weiter noch genauer, durch welche Substitutionen die möglichen Charakteristiken ineinander übergehen und entsprechend die zugehörigen zyklischen Kolonnen. *St. Pietrkowski* (Göttingen).

**Lambossy, P.: Sur une manière de différencier les fonctions cycliques d'une forme donnée.** Commentarii math. helvet. 3, 69–102 (1931).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung des 1. Teils der oben referierten Arbeit von Bays. Dort wird der Satz bewiesen: Jede Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_N)$ , die bei einer Indexsubstitution  $(x, x+1) \bmod N$  invariant bleibt und durch eine beliebige Indexpermutation in die Funktion  $\varphi'(x_1, \dots, x_N)$  übergeht, geht schon durch eine Substitution der zu  $N$  gehörigen metazyklischen Gruppe in  $\varphi'$  über. Der Satz wird für  $N = \text{Primzahl}$  bewiesen. Er gilt, wie der Verf. durch Gegenbeispiel zeigt, schon nicht mehr, wenn  $N$  Primzahlpotenz ist. Und zwar liegt das daran, daß die metazyklische Gruppe in diesem Fall außer der durch die Substitution  $\{x, x+1\}$  erzeugten Gruppe  $\S$  i. a. noch innerhalb der symmetrischen Gruppe konjugierte Untergruppen  $\sigma_1 \S \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r \S \sigma_r^{-1}$  enthält. Setzt man aber in obigem Satze an die Stelle des Wortes metazyklische Gruppe das Wort Komplex  $\mathfrak{R}$ , wo  $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} + \sigma_1 \mathfrak{M} + \dots + \sigma_r \mathfrak{M}$  bedeutet, so ist der Satz auch unter gewissen Einschränkungen über die Funktion  $\varphi$  für eine Primzahlpotenz  $N$  richtig. *St. Pietrkowski* (Göttingen).

**Mori, Shinziro: Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 1, 77–106 (1931).

Die Arbeit zu verstehen, ist Ref. nicht gelungen. Falls die Beweise richtig sind, scheint der Inhalt folgender zu sein: Als Seitenstück zu der Darstellung der Ideale eines kommutativen Ringes  $\mathfrak{R}$  mit Teilerkettensatz als Durchschnitt irreduzibler gibt Verf. unter Voraussetzung des uneingeschränkten Doppelkettensatzes (der Maximal- und Minimalbedingung) zunächst eine Zerlegung des Nullideals in „minimale Primärideale“, d. h. Primärideale, die kein primäres echtes Vielfaches außer höchstens dem Nullideal haben. Er zeigt nämlich, daß das Nullideal eine und nur eine unverkürzbare Darstellung als Durchschnitt minimaler und zu verschiedenen Primidealen gehöriger Primärideale zuläßt. In dieser Darstellung treten die endlich vielen überhaupt vorhandenen vom Einheitsideal verschiedenen minimalen Primärideale sämtlich auf. Zugleich erweist sich dieser Durchschnitt als direkt. Irreduzibel sind die minimalen Primärideale im allgemeinen nicht. Um zu untersuchen, wann sie es sind, führt Verf. die minimalen (einfachen) Ideale  $\mathfrak{m}$  von  $\mathfrak{R}$  ein. Nach einer seiner früheren Arbeiten ist (0):  $\mathfrak{m}$  stets ein Primideal  $\mathfrak{p}$ . Dann und nur dann sind alle minimalen Primärideale irreduzibel, wenn in jeder direkten Summe endlich vieler Minimalideale  $\mathfrak{m}$  die den einzelnen Gliedern  $\mathfrak{m}$  entsprechenden Primideale  $\mathfrak{p}$  sämtlich verschieden sind. Die unverkürzbare Darstellung des Nullideals als Durchschnitt endlich vieler irreduziblen Ideale ist im allgemeinen nicht eindeutig; doch ist die Anzahl der Komponenten eindeutig bestimmt, nämlich gleich der Gliederzahl einer direkten Summe von Minimalidealen, die alle Minimalideale des Ringes umfaßt. Eine Bedingung für die völlige Eindeutigkeit der Darstellung ergibt sich wiederum mit Hilfe der minimalen Ideale. Der größte gemeinsame Teiler  $\mathfrak{M}$  aller in der obigen Weise demselben Primideal  $\mathfrak{p}$  zugeordneten Minimalideale  $\mathfrak{m}$  erweist sich als direkte Summe endlich vieler. (Ist  $\mathfrak{m}$  idempotent, so gehört zu seinem  $\mathfrak{p}$ , wie gezeigt wird, überhaupt kein weiteres Minimalideal als  $\mathfrak{m}$  selbst.) Eine besondere Rolle spielt das etwaige zu dem Primideal  $\mathfrak{R}$  gehörige  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ . Während zu jedem von Null- und Einheitsideal verschiedenen Primideal  $\mathfrak{p}$  mindestens ein Minimalideal gehört, entspricht dem Einheitsideal nur dann ein solches, wenn  $\mathfrak{R}$  kein Einheitselement hat. Klar ist, daß dann  $\mathfrak{M}_0$  vom ganzen Ring  $\mathfrak{R}$  annulliert wird. Als

notwendig und hinreichend dafür, daß die unverkürzbare Darstellung des Nullideals als Durchschnitt endlich vieler irreduzibeln Ideale eindeutig bestimmt ist, erweist sich nun die Bedingung, daß das etwaige  $\mathfrak{M}_0$  als additive Abelsche Gruppe zyklisch ist und die übrigen  $\mathfrak{M}$  selber minimal sind. Von der Darstellung des Ringes  $\mathfrak{R}$  als direkte Summe direkt-unzerlegbarer Ringe wird unter Benutzung der früheren Arbeit gezeigt, daß sie zwar im allgemeinen nicht völlig, wohl aber bis auf Ringisomorphie eindeutig ist. Nebenher ergibt sich dabei der Satz von Masazo Sono „Wenn zwischen  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}^2$  kein Ideal liegt, so ist jedes zu  $\mathfrak{p}$  gehörige Primär-ideal Potenz von  $\mathfrak{p}$ “ unter den hier vorliegenden Voraussetzungen auch für Ringe ohne Einheitsselement.

W. Weber (Göttingen).

**Ore, Oystein: Linear equations in non-commutative fields.** Ann. of Math., II. s. 32, 463—477 (1931).

Das Problem der Lösung linearer Gleichungen, deren Koeffizienten „regulären“ Ringen angehören, wird untersucht. Diese regulären Ringe sind dadurch ausgezeichnet, daß sie nullteilerfrei sind, und daß irgend zwei Elemente stets gemeinsame Vielfache zulassen. Solche Ringe besitzen, wie Integritätsbereiche, einen eindeutig bestimmten Quotientenkörper. (Wie ein angegebenes Beispiel zeigt, ist diese Bedingung jedoch nicht notwendig, wenn nicht die weitere Annahme getroffen wird, daß die Lösungen von allen Gleichungen  $x \cdot b = a$  einen Körper bilden.) In diesen Ringen ist eine induktive Definition von rechts- bzw. linksseitigen Determinanten angegeben, wobei ein rechts- bzw. linksseitiger Faktor (0) unbestimmt bleibt. Die Lösung linearer Gleichungen erscheint als Quotient zweier solcher Determinanten, wodurch der irrelevante Faktor wegfällt. Matrizen, Rang mit den entsprechenden Sätzen lassen sich übertragen. Verglichen mit den Arbeiten von A. Heytings, Math. Annalen 98, 465—490, (1927) und A. R. Richardson, Math. Soc. Proc. Lond. 28, 395—420 (1928) bietet diese Methode den Vorteil, daß die Determinanten im Ring selbst definiert sind, womit Fallunterscheidungen (falls gew. Koeffizienten verschwinden) vermieden werden.

F. Bohnenblust (Princeton N. J.).

**Albert, A. Adrian: The structure of pure Riemann matrices with non-commutative multiplication algebras.** Rend. Circ. mat. Palermo 55, 57—115 (1931).

**Albert, A. Adrian: The structure of matrices with any normal division algebra of multiplications.** Ann. of Math., II. s. 32, 131—148 (1931).

Eine über einem Zahlkörper  $\Sigma$  normale (d. h. diesen Zahlkörper als Zentrum besitzende) Divisionsalgebra  $\mathfrak{B}$  heißt eine Multiplikatorenalgebra der  $(p, q)$ -Matrix  $\omega$  von  $p$  Zeilen und  $q$  Spalten mit Elementen aus  $\Sigma$ , wenn eine Darstellung  $\mathfrak{B}_2$  vom  $p$ -ten Grade durch Matrizen aus komplexen Zahlen und eine Darstellung  $\mathfrak{B}_1$  vom  $q$ -ten Grade durch Matrizen mit Elementen aus  $\Sigma$  existiert, so daß bei einander im Isomorphismus  $\mathfrak{B}_1 \simeq \mathfrak{B}_2$  entsprechenden Elementen  $X$  und  $\xi$  immer gilt  $\xi \omega = \omega X$ . Zwei  $(p, q)$ -Matrizen  $\omega_1, \omega_2$  heißen isomorph in  $\Sigma$ , wenn eine nichtsinguläre  $(p, p)$ -Matrix  $\gamma$  aus komplexen Zahlen und eine nichtsinguläre  $(q, q)$ -Matrix  $G$  mit Elementen aus  $\Sigma$  existiert, so daß  $\omega_1 = \gamma \omega_2 G$  ist. Eine normale Divisionsalgebra vom Grade  $n^2$  über  $\Sigma$  heißt vom Typus  $R_n$ , wenn in ihr ein Element  $a$  auftritt, das Nullstelle eines in  $\Sigma$  irreduziblen Polynoms vom Grade  $n$  ist. Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die skalaren Nullstellen dieses Polynomes. Damit nun eine  $(p, q)$ -Matrix  $\omega$  aus komplexen Zahlen eine solche Divisionsalgebra vom Typus  $R_n$  als eine Multiplikatorenalgebra besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß  $p \equiv 0(n)$ ,  $q \equiv 0(n^2)$  und  $\omega$  isomorph in  $\Sigma$  einer Matrix  $(\tau P_j \alpha_j^{k-1})$  ( $j, k = 1, \dots, n$ ) ist; dabei ist bei  $p = np'$ ,  $q = nq'$  die Matrix  $\tau$  eine  $(p', q')$ -Matrix aus komplexen Zahlen, während die  $P_j$  quadratische  $q'$ -reihige Matrizen mit Elementen aus  $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  darstellen, die durch die Divisionsalgebra vom Typus  $R_n$  in gewisser Weise bestimmt sind. — Eine  $(p, 2p)$ -Matrix  $\omega$  aus komplexen Zahlen heißt Riemannsche Matrix über einem reellen Körper  $P$ , wenn eine alternierende  $(2p, 2p)$ -Matrix  $C$  mit Elementen aus  $P$  existiert, so daß  $\omega C \omega' = 0$  und  $\sqrt{-1} \omega C \omega'$  eine positiv-definite Hermitesche Matrix ist. Man nennt eine  $(2p, 2p)$ -Matrix  $A$  mit Elementen aus  $P$  eine Projektivität von  $\omega$ , wenn eine  $(p, p)$ -Matrix  $\alpha$  komplexer Zahlen mit  $\alpha \omega = \omega A$  existiert. Eine Riemannsche Matrix heißt rein, wenn alle ihre Projektivitäten nichtsingulär sind; sie bilden in diesem Fall

eine Divisionsalgebra über  $P$ , die eine Darstellung vom Grade  $2p$  eines hyperkomplexen Systems  $\mathfrak{D}$  über  $P$ , der Multiplikationsalgebra von  $\omega$ , ist, das aus der Gesamtheit der Elemente  $a': \alpha\omega = \omega A$  besteht. — Das Strukturproblem beliebiger Riemannscher Matrizen über einem reellen Körper  $P$  wurde durch Scorza auf das der reinen und wird nun durch Albert in der ersten Arbeit auf das solcher reinen Riemannschen Matrizen über  $P$  zurückgeführt, deren Multiplikationsalgebra von einem der 3 folgenden Typen ist: 1. Normale Divisionsalgebra vom Typus  $R_n$  über  $P$ , für die die skalaren Nullstellen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des zum ausgezeichneten Element  $a$  gehörigen irreduziblen Polynoms sämtlich reell sind. 2. Wie in 1, nur daß jetzt die skalaren Nullstellen sämtlich rein imaginär ausfallen; bedeutet ferner  $\mathfrak{G}_i$  die zum Körper  $P(\alpha_i)$  gehörige Untergruppe der Galoisschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $\sigma$  den Automorphismus von  $\mathfrak{G}$ , der jede Zahl in die konjugiert-komplexe überführt, so soll stets  $\sigma^{-1}\mathfrak{G}_i\sigma = \mathfrak{G}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sein. 3. Divisionsalgebra  $\mathfrak{A}$  vom Grade  $2n^2$  über  $P$ , die normal und vom Grade  $n^2$  über einem Erweiterungskörper  $P(q)$  mit  $q^2 = \varepsilon < 0$  und  $\varepsilon$  aus  $P$  ist; überdies enthält sie ein Element  $a$  vom Grade  $n$  sowohl bez.  $P$  wie bez.  $P(q)$ , dessen zugehörige irreduzible Polynome in  $P$  bzw.  $P(q)$  beidemal nur reelle Nullstellen haben. — Mittels des eingangs erwähnten Satzes über die Multiplikatorenalgebren werden nun in der zweiten Arbeit notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine  $(p, q)$ -Matrix  $\omega$  mit Elementen aus  $P$  eine reine Riemannsche Matrix mit einer Multiplikationsalgebra ist, die jeweils zu einem der in 1, 2, 3 beschriebenen Typen gehört, Bedingungen, die in der ersten Arbeit nur teilweise vorlagen und dort umständlicher und undurchsichtiger abgeleitet wurden. Grell (Jena).

**Albert, A. A.:** On the Wedderburn norm condition for cyclic algebras. Bull. amer. math. Soc. **37**, 301–312 (1931).

Ein hyperkomplexes System  $\mathfrak{A}$  über einem Körper  $P$  der Charakteristik Null heißt zyklisch und vom Typus  $R_n$ , wenn es eine  $P$ -Basis  $\alpha^r \beta^s$  ( $r, s = 0, \dots, n-1$ ) besitzt, wo  $\alpha$  Nullstelle eines in  $P$  irreduziblen Galoisschen Polynoms

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^S) \dots (x - \alpha^{S^{n-1}})$$

mit zyklischer Gruppe ( $S$  der erzeugende Automorphismus) und  $\beta^n = \gamma \neq 0$  mit  $\gamma$  aus  $P$  sowie  $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^S$  ist. Wedderburn gab als hinreichende Bedingung dafür, daß  $\mathfrak{A}$  Divisionsalgebra: Keine Potenz  $\gamma^r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) darf Norm eines Elementes aus  $P(\alpha)$  sein. Im Fall  $n = 4$  kann nach Garver  $f(x)$  auf die kanonische Form

$$f(x) = x^4 + 2\nu\tau x^2 + \nu^2\Delta^2\tau$$

mit  $\nu \neq 0$ ,  $\Delta \neq 0$  aus  $P$  gebracht werden, wobei noch  $\tau = 1 + \Delta^2$  und nicht Quadrat eines Elementes aus  $P$  ist. Es wird gezeigt: Ist zunächst  $\gamma^2$  nicht Norm eines Elementes aus  $P(\alpha)$ , so auch nicht  $\gamma$  und  $\gamma^3$ , also ist dann  $\mathfrak{A}$  nach Wedderburn Divisionsalgebra. Ist aber  $\gamma^2$  Norm eines Elementes aus  $P(\alpha)$ , so wird  $-\gamma = \beta_1^2 - \beta_2^2\tau$  mit  $\beta_1, \beta_2$  aus  $P$ . Setzt man nun

$$\sigma = 2\beta_1\gamma, \quad \varrho = 2\beta_1\nu\tau(\beta_2\Delta - \beta_1)$$

und

$$Q = \tau\lambda_1^2 + \sigma\lambda_2^2 - \sigma\tau\lambda_3^2 - \gamma\lambda_4^2 - \varrho\lambda_5^2 + \gamma\varrho\lambda_6^2,$$

so ist dann und nur dann  $\mathfrak{A}$  eine Divisionsalgebra, wenn  $Q$  in  $P$  außer der trivialen Nullstelle  $(0, 0, \dots, 0)$  keine weitere hat. Für den Fall, daß  $P$  der Körper der Rationalzahlen ist, haben auf Grund Dicksonscher Überlegungen die Formen  $Q$  stets nichttriviale Nullstellen; es kann also nicht  $\gamma^2$  Norm eines Elementes aus  $P(\alpha)$  sein, wenn  $\mathfrak{A}$  Divisionsalgebra wird, d. h. nach dem oben bemerkten: Für eine zyklische Divisionsalgebra vom Typus  $R_4$  über dem Körper der Rationalzahlen ist die Wedderburnsche Normbedingung notwendig und hinreichend. Grell (Jena).

**Pall, Gordon:** Sums of four or more values of  $ux^2 + vx$  for integers  $x$ . (California Inst. of Techn., Pasadena.) Bull. amer. math. Soc. **37**, 267–270 (1931).

Es sei  $0 < \nu < \mu$ ;  $f(x) = \mu x^2 + \nu x$ ;  $T$  bedeute die Tabelle aller, nach der GröÙe geordneten, Zahlen,  $Z = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_4)$ , für ganzzahlige pos. und neg.  $x_i$ .

Der größte Sprung in  $T$  ist  $\mu - \nu$ , wenn  $\mu \geq \frac{3}{2}\nu$ , und  $5\nu - 3\mu$ , wenn  $\mu \leq \frac{3}{2}\nu$ . Für den Beweis dieses Satzes braucht man: Hilfssatz I: Die Gleichungen  $a = x_1^2 + \dots + x_4^2$ ;  $b = x_1 + \dots + x_4$  (1) sind dann und nur dann in ganzen Zahlen  $x_i$  lösbar, wenn  $a \equiv b \pmod{2}$ ,  $4a \geq b^2$  und  $4a - b^2$  nicht die Form  $4^h(8v+7)$  hat. Hilfssatz II: Die Gleichung  $p = (3x_1^2 + 2x_1) + \dots + (3x_4^2 + 2x_4)$  ist in ganzen Zahlen  $x_i$  lösbar für  $p \geq 0$ . Es sei nun  $B_a$  die größte Zahl  $b$  bei gegebenem Wert von  $a \geq 0$ , für welche die Gleichungen (1) in ganzen Zahlen lösbar sind. Wenn  $a \not\equiv 0 \pmod{4}$ , so ist nach dem Hilfssatz I  $B_a$  die größte Zahl  $b \equiv a \pmod{2}$ , für welche  $4a \geq b^2$  ist. Daher  $(B_a + 2)^2 > 4a$ . Alle Zahlen  $b$ , für welche die Gleichungen (1) lösbar sind, sind daher:  $B_a, B_a - 2, B_a - 4, \dots - B_a + 2, -B_a$ . Weiter ist für ungerades  $a$ ,  $B_{a+1} \leq B_a + 1$ . Man betrachtet jetzt 3 Fälle:  $\mu \geq 3\nu$ ;  $\frac{5}{3}\nu < \mu < 3\nu$ ;  $\mu \leq \frac{5}{3}\nu$ . I. Für ungerades  $a$  kommt man mit Sprüngen  $= 2\nu$  von einem Element  $a\mu + b\nu$  aus  $T$  zu  $a\mu + B_a\nu$  und von  $a\mu + B_a\nu$  zu  $(a+1)\mu + B_{a+1}\nu$  mit Sprüngen  $\leq \mu - \nu$ . Aus der Ungleichheit  $(a+2)\mu - B_{a+2}\nu - \{(a+1)\mu + B_{a+1}\nu\} \leq \mu - \nu$  ergibt sich dann der Beweis. II. Der Beweis ist analog zu I. III. Es bedeute  $M_p$  das System aller Zahlen  $\mu a + \nu b$  mit  $p = 3a + 2b$ ,  $4a \geq b^2$ ,  $a \equiv b \pmod{2}$ ,  $4a - b^2 \neq 4^h(8v+7)$ . Nun ergibt sich der Beweis aus der Bemerkung, daß  $T$  identisch ist mit dem geordneten System aller Zahlen aus allen Systemen  $M_p$ . Folgerung: Es sei  $0 < \nu < \mu$ ,  $s \geq 4$ ,  $T$  die Tabelle aller, der Größe nach, geordneten Zahlen  $Z = f(x_1) + \dots + f(x_s)$ , dann ist der größte Sprung in  $T$ :  $\mu - \nu$ , wenn  $s\mu \geq (s+2)\nu$ , und  $(s+1)\nu - (s-1)\mu$ , wenn  $s\mu \leq (s+2)\nu$ . N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Tartakowsky, W.:** La totalité des nombres représentables par une forme indéfinie générale quadratique ou eubique. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1072–1075 (1931).

Durch verschiedene Verallgemeinerungen der bekannten Weylschen Abschätzung für die Gausschen Summen hat der Verf. eine Formel gefunden, welche asymptotisch die Anzahl der Darstellungen irgendeiner ganzen Zahl durch eine gegebene indefinite quadratische oder kubische Form von beliebig vielen Variablen gibt. Die betreffende Formel sowie gewisse Folgerungen derselben werden in der vorliegenden Note ohne Beweis mitgeteilt. Myrberg (Helsinki).

**Sivasankaranarayana Pillai, S.:** On the inequality „ $0 < a^x - b^y \leq n$ “. J. indian math. Soc. 19, 1–11 (1931).

Verf. beweist mit dem Siegelschen Approximationssatz für algebraische Irrationalzahlen: Sind  $a, b, m, n$  gegebene, natürliche Zahlen, ist  $\delta$  fest  $> 0$ , dann gilt für jedes ganze  $x > x_0(\delta)$  und jedes ganze  $y$  die Ungleichung  $am^x - bn^y > m^{x(1-\delta)}$ , wenn nur  $am^x > bn^y$  ist und  $\log m / \log n$  irrational ist, und ähnliche Sätze (u. a. Verschärfung eines Satzes von Polyà). Aus dem zitierten Satz und einer Hardy-

Littlewoodschen Approximation für  $\sum_{\mu=1}^t [\mu\Theta]$  ( $\Theta$  irrational) leitet Verf. eine Formel her für die Anzahl  $N(a)$  der ganzzahligen Lösungen  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  von  $0 < n^x - m^y \leq a$  ( $n, m, a$  gegebene natürliche Zahlen,  $\log m / \log n$  irrational), und zwar mit dem Fehlerglied  $o(\log a)$ . Die Formulierungen sind nicht immer genau. J. F. Koksma.

**Tartakowsky, W.:** Sur la représentation d'un système de nombres par un système de formes quadratiques additives positives. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 907–910 (1931).

L'auteur donne une application de la méthode d'Euler et d'Hardy-Littlewood dans la théorie additive des nombres sur le problème de représentation d'un système des nombres par un système des formes quadratiques additives. Considérons la série

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{(H)} x_1^{F_1(h_1, \dots, h_s)} \dots x_s^{F_s(h_1, \dots, h_s)} = \sum_{\substack{j_i < j'_i(H) \\ j_i > j'_i(H)}} \tau(F_1, \dots, F_s; H; j_1, \dots, j_s) x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s}$$

où  $F_i(h_1, \dots, h_s) = \sum_{K=1}^s a_{iK} h_K^2$ ,  $j_i$  sont des nombres entiers,  $(H)$  est un ensemble des points entiers dans l'espace  $(h_1, \dots, h_s)$ ,  $j'_i(H)$  est la valeur maximum et  $j_i(H)$  est la valeur minimum de  $F_i$  dans  $(H)$  et  $\tau(F_1, \dots, F_s; H; j_1, \dots, j_s)$  est le nombre des solutions du système d'équations  $F_i(h_1, \dots, h_s) = j_i$  dans  $(H)$ . Si la fonction  $f(x_1, \dots, x_s)$  est régu-

lière autour de l'origine dans l'espace de  $\sigma$  dimensions des variables complexes  $x_1, \dots, x_\sigma$ , est donné par l'intégrale

$$\tau(F_1, \dots, F_\sigma; H; j_1, \dots, j_\sigma) = \frac{1}{(2\pi i)^\sigma} \int_{C_1} \dots \int_{C_\sigma} \frac{f(x_1, \dots, x_\sigma) dx_1 \dots dx_\sigma}{x_1^{j_1+1} x_2^{j_2+1} \dots x_\sigma^{j_\sigma+1}}.$$

Le domaine d'intégration (c) peut être remplacé à l'aide des égalités  $x_K = e^{2\pi i \Theta_K}$ ,  $\Theta \leq \Theta_K \leq 1$ , par le domaine cubique  $K$  dans l'espace  $(\Theta_1, \dots, \Theta_\sigma)$ . Il est connu, que pour chaque point de  $(\Theta_1, \dots, \Theta_\sigma)$  on peut trouver les nombres entiers  $l_1, \dots, l_\sigma$  et  $q \leq N$  tels, que  $|q\Theta_K - l_K| < 2/N^{1/\sigma}$ . Couvrons le domaine  $K$  par petits cubes avec le côté  $2/qN^{1/\sigma}$  et nommons plans mineurs les domaines qui correspondent à  $q \leq N^\beta$ ,  $\beta < 1$ , et plans majeurs les domaines à  $q \geq N^\beta$  (parallèlement aux notions arcs mineurs et majeurs dans la méthode d'Hardy et Littlewood). A l'aide de ces considérations l'auteur obtient pour  $s > s_0$ , où  $s_0$  dépend de  $\sigma$  et de la propriété de la matrice  $(a_{iK})$  l'évaluation suivante de  $\tau(F_i; K; j_i)$ :

$$\tau(F_i; K; j_i) = \Delta V(j_1, j_2, \dots, j_\sigma) \gamma(F_1, \dots, F_\sigma; j_1, \dots, j_\sigma) + O(n^{\frac{1}{2}s - 2\sigma - C_0})$$

où

$$C_0 > 0, \quad n = \sqrt{j_1^2 + \dots + j_\sigma^2}, \quad \Delta V(j_1, \dots, j_\sigma) = \sum_{(\varepsilon_i=0,1)} (-1)^{\sum \varepsilon_i} \nu(j_1 - \varepsilon_1, \dots, j_\sigma - \varepsilon_\sigma),$$

$\nu(j_1, \dots, j_\sigma)$  est la volume de le partie de  $K$  où  $F_1 < F_\sigma, \dots, j_1 < j_\sigma$  et

$$\begin{aligned} \gamma(F_1, \dots, F_\sigma; j_1, \dots, j_\sigma) &= \sum_{q=1}^{\infty} 1/q^s \sum_{(l_1, \dots, l_\sigma, q)=1}^{(1 \leq l_p \leq q)} \sum_{h_1, \dots, h_s=0}^{q-1} e^{2\pi i \sum_{K=1}^{\sigma} l_K/q (F_K - j_K)} \\ &= \prod_{p=2}^{\infty} x_p(F_1, \dots, F_\sigma; j_1, \dots, j_\sigma) \end{aligned}$$

où  $p$  sont tous les nombres premiers,

$$x_p(F_1, \dots, F_\sigma; j_1, \dots, j_\sigma) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p^{-\lambda(s-\sigma)} N(p^\lambda; F_1, \dots, F_\sigma, j_1, \dots, j_\sigma),$$

$$N(K, F_1, \dots, F_\sigma, j_1, \dots, j_\sigma)$$

est le nombre de représentations des nombres  $(j_1, \dots, j_\sigma)$  par  $(F_1, \dots, F_\sigma) \bmod K$  quand  $0 \leq h_p \leq K-1$  ( $0 \leq p \leq s$ ).

A. Gelfond (Moskau).

**Bohnenblust, H. F., and Einar Hille:** On the absolute convergence of Dirichlet series. Ann. of Math., II. s. 32, 600—622 (1931).

This paper contains a complete solution of a problem of great importance for the theory of Dirichlet series, which was formulated by H. Bohr (Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl. 1913, 441—488) but during 18 years resisted the efforts of several mathematicians. The main result of the paper is that for any  $\sigma$  satisfying the condition

$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$  there exists an ordinary Dirichlet series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  for which the width of

the strip of uniform but not absolute convergence,  $d = \sigma_a - \sigma_u$  is exactly equal to  $\sigma$ . It was proved by Bohr that  $d \leq \frac{1}{2}$  and by Toeplitz (Ibidem, 417—432) that  $\max d \geq \frac{1}{4}$ . The authors base their proof upon an ingenious combination and extension of various tools developed by Bohr: the relationship between the Dirichlet series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (*)$$

and the associated power series in infinitely many variables

$$P(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{r_1} \dots x_{n_r}^{r_r}, \quad n = p_{n_1}^{r_1} \dots p_{n_r}^{r_r}, \quad (**)$$

where  $p_1, p_2, \dots$ , is the sequence of consecutive primes 2, 3, 5, ...; by Toeplitz: usage of matrices  $(a_{st})$  satisfying the conditions  $\sum_{t=1}^n a_{rt} \bar{a}_{st} = n \delta_{rs}$  and of other matrices

that are obtained from the preceding one by „substituting“ a matrix  $(b_{pq})$  of the same type,  $(a_{st}(b_{pq}))$ ; by Littlewood: bilinear forms  $\sum_{s,t=1}^{\infty} a_{st} x_s^{(1)} x_t^{(2)}$  bounded in the space  $(G_0) |x_1^{(i)}| \leq 1, |x_2^{(i)}| \leq 1, \dots$ . In §§ 1—3 the authors extend the results of Littlewood ( $m=2$ ) to  $m$ -linear, symmetric  $m$ -linear and  $m$ -ic forms. After defining an  $m$ -linear form

$$L(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \equiv \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^{\infty} a_{i_1 i_2, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

to be bounded by  $H$  in  $(G_0)$  when all the „segments“

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} \dots \sum_{i_m=1}^{N_m} a_{i_1 \dots i_m} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

remain absolutely  $\leq H$  in  $(G_0)$ , the authors prove that a necessary condition that  $L(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$  be bounded in  $(G_0)$  by  $H$  is that the quantities  $S$  and  $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$ ,

$$S = \left[ \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |a_{i_1, \dots, i_m}|^{\varrho} \right]^{\frac{1}{\varrho}}; \quad T^{(\nu)} = \sum_{i_{\nu}=1}^{\infty} T_{i_{\nu}}^{(\nu)}; \quad T_{i_{\nu}}^{(\nu)} = \left[ \sum |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \varrho = \frac{2m}{m+1}$$

where the last summation is extended over  $i_1, i_2, \dots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \dots, i_m$  from 1 to  $\infty$ , be less than  $A_m H$ ,  $A_m$  being a constant which depends only on  $m$ . It is also proved that the result above is the „best“ possible, the same being true for the symmetric  $m$ -linear and  $m$ -ic forms. An important rôle in the proof is played by the forms of the type

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)},$$

where the matrix  $(a_{rs})$  is obtained from a simpler matrix  $(M_1 = \exp 2\pi i rs/p)$ ,  $r, s = 1, 2, \dots, p$ ,  $p$  a prime  $> m$ , by successive „substitutions“

$$(a_{rs}) = (M_{\mu})(r, s = 1, 2, \dots, p^{\mu}), \quad (M_{\mu}) = (\exp(2\pi i rs/p)(M_{\mu-1})).$$

In § 4 the authors prove an important extension of a classical result of Bohr: If the power series

$$P(x_1, x_2, \dots) = c + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} + \dots$$

is bounded in the domain  $|x_n| \leq G_n = p_n^{-\sigma_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , then its  $m$ -th polynomial

$$P_m(x_1, x_2, \dots) = c + \sum c_i x_i + \dots + \sum c_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

is absolutely convergent in  $|x_n| \leq \varepsilon_n G_n$ , provided the series  $\sum \varepsilon_n^{\sigma_m}$ ,  $\sigma_m = 2m/m-1$  converges. It is proved next that this result is the „best“ possible. Thus it is shown that examples of Toeplitz are the best obtainable in the case where the associated power series  $P$  reduces to a quadratic form ( $m=2$ ). In §§ 5—6 the main result of the paper is derived. The derivation is made comparatively easy by the preceding preparations. In the concluding § 7 an extension to some more general Dirichlet series is indicated.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I., U. S. A.)

## Analysis.

Sibirani, Filippo: Sul calcolo delle derivate parziali. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 53—56 (1931).

Widerlegung einer Behauptung von D. Pompeiu (Rend. circ. mat. Palermo 54, 113—123) über die Äquivalenz der gewöhnlichen Definition der partiellen Ableitungen einer Funktion zweier Veränderlichen mit den Grenzwerten der Quotienten gewisser Dreiecksinhalte.

R. Schmidt (Kiel).

Julia, Gaston: Fonctions continues sans dérivées formées avec les itérées d'une fraction rationnelle. Ann. sci. École norm. supér., III. s. 48, 1—14 (1931).

Die Theorie der Reihen vom Typus  $\sum a_n R_n(z)$ , in denen die  $a_n$  Konstanten, die  $R_n(z)$  die Iterierten einer rationalen Funktion  $R(z)$  sind (C. r. Acad. Sci. Paris 180 u. 181;

Acta math. 56), wird zur Aufstellung einer Klasse von stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen angewendet. Die Weierstraßsche Funktion ist in der Klasse enthalten.

R. Schmidt (Kiel).

**Favard, J.:** Sur les zéros des polynomes. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 716–718 (1931).

Enoncé de certains résultats relatifs aux zéros réels des polynomes

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$

dont les coefficients sont réels et satisfont à la relation

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \dots + c_k a_k = 0,$$

$c_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) étant une suite de nombres donnée. La question se trouve rattachée au problème des moments

$$\int x^n d\psi(x) = c_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

On trouve une généralisation d'un résultat de M. P. Montel (C. r. Acad. Sci. Paris 191, 511).

W. Gontscharow (Charkow).

**Preece, C. T.:** Theorems stated by Ramanujan. X. J. Lond. math. Soc. 6, 22–32 (1931).

Verf. beweist 3 von Ramanujan aufgestellte Sätze. Das Haupthilfsmittel bilden die beiden folgenden (weiterhin als L I und L II zitierten) Theoreme: Lemma I. Es gilt (mit Benutzung der Pringsheimschen Schreibweise)

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{|p|} + \frac{a_1}{|q|} + \frac{a_2}{|p|} + \frac{a_3}{|q|} + \dots &= \frac{a_0 q}{|pq + a_1|} - \frac{a_1 a_2}{|pq + a_2 + a_3|} - \frac{a_3 a_4}{|pq + a_4 + a_5|} - \dots \\ &= \frac{1}{p} \left\{ a_0 - \frac{a_0 a_1}{|pq + a_1 + a_2|} - \frac{a_2 a_3}{|pq + a_3 + a_4|} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Lemma II. Wenn  $b_1 = a_1 - q\Theta$ ,  $b_2 + b_3 = a_2 + a_3 - q\Theta$ ,  $b_4 + b_5 = a_4 + a_5 - q\Theta$ , ... und  $b_1 b_2 = a_1 a_2$ ,  $b_3 b_4 = a_3 a_4$ ,  $b_5 b_6 = a_5 a_6$ , ... gesetzt wird, so gilt

$$\frac{a_0}{|p|} + \frac{a_1}{|q|} + \frac{a_2}{|p|} + \frac{a_3}{|q|} + \dots = \frac{a_0}{|p + \Theta|} + \frac{b_1}{|q|} + \frac{b_2}{|p + \Theta|} + \frac{b_3}{|q|} + \dots$$

L I findet sich bei Rogers (Proc. Lond. Math. Soc. (2) 4, 74 (1907); L II folgt leicht aus L I. Der 1. Satz von Ramanujan lautet: Wird

$$P = \frac{\Gamma\{\frac{1}{4}(x+m+n+1)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x+m-n+1)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x-m+n+3)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x-m-n+3)\}}{\Gamma\{\frac{1}{4}(x-m+n+1)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x-m-n+1)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x+m+n+3)\} \Gamma\{\frac{1}{4}(x+m-n+3)\}}$$

gesetzt, so gilt die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{1-P}{1+P} = \frac{m}{|x|} + \frac{1^2 - n^2}{|x|} + \frac{2^2 - m^2}{|x|} + \frac{3^2 - n^2}{|x|} + \frac{4^2 - m^2}{|x|} + \dots \quad (1)$$

Zum Beweise wird die Malmsténsche Formel für  $\log \Gamma(z)$  herangezogen, wodurch sich ein einfacher Integralausdruck für  $\Phi(u) = -\frac{1}{2} \log P$  ergibt ( $u = x^{-1}$  gesetzt). Sodann wird  $f(u) = P^{-1}$  in einen Kettenbruch entwickelt und mittels L I und L II umgeformt. Aus  $\Im \log \Phi(u) = (f(u) - 1)/(f(u) + 1)$  erkennt man schließlich die Richtigkeit von (1). Hieraus erhält man leicht den 3. Satz von Ramanujan: Bedeutet

$$F(\alpha, \beta) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{|x|} + \frac{\beta^2 + k^2}{|x|} + \frac{\alpha^2 + (2k)^2}{|x|} + \frac{\beta^2 + (3k)^2}{|x|} + \dots \right\},$$

so ist

$$F(\alpha, \beta) + F(\beta, \alpha) = 2F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Denn wir brauchen in Satz 1 nur  $m$  durch  $i\alpha k^{-1}$ ,  $n$  durch  $i\beta k^{-1}$ ,  $x$  durch  $xk^{-1}$  zu ersetzen, um nach Obigem

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t k^{-1}) \cos(\beta t k^{-1})}{t \coth t} e^{-\frac{x t}{k}} dt$$

zu erhalten, woraus wegen  $\sin \alpha t \cos \beta t + \sin \beta t \cos \alpha t = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} t \cos \frac{\alpha + \beta}{2} t$  die

Behauptung folgt. Der 2. Satz von Ramanujan behauptet die beiden Kettenbruchentwicklungen

$$4 \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\mathfrak{Cof} x} dx = \frac{1}{|1|} + \frac{1^2}{|1|} + \frac{1^2}{|1|} + \frac{2^2}{|1|} + \frac{2^2}{|1|} + \frac{3^2}{|1|} + \frac{3^2}{|1|} + \dots, \quad (2)$$

$$2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x\sqrt{3}}}{\mathfrak{Sin} x} dx = \frac{1}{|1|} + \frac{1^3}{|1|} + \frac{1^3}{|1|} + \frac{2^3}{|1|} + \frac{2^3}{|1|} + \frac{3^3}{|1|} + \frac{3^3}{|1|} + \dots. \quad (3)$$

Es bedeute

$$\Phi_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-\frac{t}{x}}}{\mathfrak{Cof} t} dt; \quad \Psi_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-\frac{t}{x}}}{\mathfrak{Sin} t} dt.$$

Für  $\Phi_0, \Phi_1, \Psi_1, \Psi_2$  hat schon Rogers (l.c.) Kettenbruchentwicklungen gegeben. Verf. gibt dafür neue Beweise und Darstellungen für beliebiges  $n$ . Für  $n=1$  erhält man durch eine längere Rechnung

$$\Phi_1(x) = \frac{x^2}{|1-x^2|} + \frac{2^2 x^2}{|1|} + \frac{2^2 x^2}{|1-x^2|} + \frac{4^2 x^2}{|1|} + \frac{4^2 x^2}{|1-x^2|} + \dots$$

Da  $4\Phi_1(1/\sqrt{5})$  die linke Seite von (2) ist, so ist damit (2) bewiesen. Ferner ergibt sich durch ganz ähnliche Betrachtungen

$$\Psi_2(x) = \frac{x^2}{|1-x^2|} + \frac{2x^2}{|1|} + \frac{2 \cdot 1^3 x^2}{|3(1-x^2)|} + \frac{2 \cdot 2^3 x^2}{|1|} + \frac{2 \cdot 2^3 x^2}{|5(1-x^2)|} + \frac{2 \cdot 3^3 x^3}{|1|} + \dots$$

Da  $2\Psi_2(1/\sqrt{3})$  die linke Seite von (3) ist, so ist (3) damit bewiesen.

G. Wiarda (Dresden).

**Verblunsky, S.:** The symmetric derivative and its application to the theory of trigonometric series. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 163—173 (1931).

The author proves a series of theorems on the symmetric derivative and applies them to the uniqueness of trigonometric series. We quote as examples the following theorems. (a) If the upper and lower symmetric derivatives ( $\overline{DF}$  and  $\underline{DF}$ ) of a function  $F(x)$ , defined for  $a < x < b$ , are finite and if there exists a function  $\varphi$ , integrable in the sense of Denjoy-Perron and such that  $\overline{DF} \geq \varphi \geq \underline{DF}$ ,

(\*)

then, for almost all  $x$ ,  $F(x)$  is equal to  $\int_a^x \varphi(t) dt + C$ ,  $C$  denoting a constant. (b) Let, for a trigonometric series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (**)$$

with coefficients  $O(n^2)$ , the integrated series  $\sum_1^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)/n$  have its upper and lower Poisson sums finite everywhere and let  $F$  be the first of them. Then, if (\*) is true, with  $\varphi$  integrable in the sense of Denjoy-Perron, (\*\*) is the Fourier series of  $\varphi$ .

A. Zygmund (Wilno).

**Moore, C. N.:** Types of series and types of summability. Bull. amer. math. Soc. 37, 240—250 (1931).

General remarks on the history of divergent series and on the applications of some methods of summability to power, Dirichlet's and Fourier series. A. Zygmund (Wilno).

**Verblunsky, S.:** On summable trigonometric integrals. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 174—183 (1931).

The paper contains a proof of the following theorem. Let the coefficients  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  of a trigonometric integral

$$\int_0^{\infty} \{A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x\} d\lambda \quad (1)$$

be absolutely integrable in every finite interval and let

$$\int_{\mu}^{\mu+1} \{A^2(\lambda) + B^2(\lambda)\} d\lambda = O(\mu^2), \text{ as } \mu \rightarrow \infty.$$

Let the upper and lower Poisson sums (which we denote respectively by  $\bar{P}$  and  $\underline{P}$ ) of (1) be finite everywhere and absolutely integrable in every finite interval. Then  $\underline{P}(x) = \bar{P}(x) = f(x)$  almost everywhere and

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx \quad (C, 2) \quad (2)$$

for almost all  $\lambda$ . If  $f$  is absolutely integrable in  $(-\infty, +\infty)$  the integrals (2) are convergent. The theorem is an extension to the case of trigonometric integrals of an analogous theorem for trigonometric series, published previously by the author in the Proc. Lond. Math. Soc. **31**, 370—386 (1930).

A. Zygmund (Wilno).

**Hardy, G. H., and J. E. Littlewood:** Notes on the theory of series. XIV: An additional note on the summability of Fourier series. J. Lond. math. Soc. **6**, 9—12 (1931).

Beweis eines Satzes (in berichtigtem Wortlaut), der in einer früheren Note der Verff. [J. Lond. Math. Soc. **1**, 134—138 (1926)] mitgeteilt wurde: „Wenn  $p \geq 1$  ist und die Funktion  $\Phi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\}$  der Bedingung

$$\int_0^t |\Phi(u)|^p du = O(t)$$

für  $t \rightarrow 0$  genügt, dann ist die Fouriersche Reihe von  $f(u)$  an der Stelle  $u = x$  entweder durch alle Cesàroschen Mittel von positiver Ordnung summierbar, oder durch kein solches. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Summabilität ist

$$\Phi(t) \rightarrow 0 \quad (C, r)$$

für jedes  $r > 1/p$ .“ Ferner wird gezeigt, daß der Satz sich nicht verschärfen läßt. (XIII. vgl. dies. Zbl. **1**, 135.)

R. Schmidt (Kiel).

**Karamata, J.:** Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. J. f. Math. **164**, 27—39 (1931).

Verf. wendet die gleiche Schlußweise, mit der es ihm gelang, überraschend einfache Beweise für Hardy-Littlewoodsche Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes zu erhalten (Math. Z. **32**, 319—320), auf die analogen Probleme für die Laplacesche und Stieltjessche Transformation an.

R. Schmidt (Kiel).

### Differentialgleichungen:

**Kamke, E.:** Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen. II. Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abh. **17**, 1—15 (1931).

In der Arbeit wird ein sehr allgemeines Kriterium aufgestellt für die eindeutige Bestimmtheit der Lösung eines Systems von gewöhnlichen reellen Differentialgleichungen

$$y'_v = f_v(x_1, y_1, \dots, y_n) \quad (v = 1, \dots, n).$$

Das Kriterium enthält mit wenigen Ausnahmen die bisher bekannten Eindeutigkeitskriterien als Spezialfälle und besagt folgendes:  $S(u_1, \dots, u_n)$  sei eine im ganzen  $u_1, \dots, u_n$  Raum stetige, niemals negative Funktion, die nur an der Stelle  $u_1 = \dots = u_n = 0$  verschwindet. Die für je  $n$  im gleichen Intervall differenzierbare Funktionen  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  gebildeten beiderseitigen Differentialquotienten  $D_{\pm} S(u_1, \dots, u_n)$  sollen in diesem Intervall existieren und der Relation

$$D_{\pm} S(u_1(x), \dots, u_n(x)) \leq S(u'_1(x), \dots, u'_n(x))$$

genügen. Ferner sei  $\Omega(x, z)$  in dem offenen Gebiet  $0 < x < a; -\infty < z < \infty$  stetig und

$\chi(x) \equiv 0$  die einzige für  $0 \leq x < a$  differenzierbare Funktion, die für  $0 < x < a$  die Differentialgleichung

$$\chi' = \Omega(x, \chi)$$

und die Anfangsbedingungen  $\chi(0) = \chi'(0) = 0$  erfüllt. Genügen sodann die Funktionen  $f_\nu(x, y_1, \dots, y_n)$  — definiert im Gebiet  $\xi \leq x < \xi + a$ ,  $|y_\nu - \eta_\nu| < b$  — für irgend zwei Punkte  $x, y_\nu$  und  $x, \bar{y}_\nu$  des Gebietes  $\xi < x < \xi + a$ ,  $|y_\nu - \eta_\nu| < b$  der Ungleichung

$$S(\bar{f}_1 - f_1, \dots, \bar{f}_n - f_n) \leq \Omega(x - \xi, S(\bar{y}_1 - y_1, \dots, \bar{y}_n - y_n)),$$

so besitzt das gegebene System höchstens eine durch den Punkt  $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n$  gehende Integralkurve. Beispiele von zulässigen Funktionen  $S$  sind die Funktionen

$$S = |u_1| + \dots + |u_n|$$

$$S = \text{Max}(|u_1| + \dots + |u_n|)$$

$$S = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2},$$

die auf bereits bekannte Eindeigkeitskriterien führen. *Lüneburg (Göttingen).*

**Hohenemser, K., und W. Prager:** Über die Anzahl der Knotenpunkte bei erzwungenen und freien Stabschwingungen. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 92—97 (1931).

In der Arbeit wird der folgende Satz bewiesen: „Ordnet man die Eigenschwingungen eines in stabiler Weise mit Hilfe von beliebig vielen festen Stützen, festen oder elastischen Einspannungen gelagerten Stabes nach steigenden Schwingungszahlen, so besitzt die  $n$ -te Oberschwingungsform genau  $n$  Knotenpunkte.“ Es handelt sich also um das „Oszillationstheorem“ der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$(py'')'' - \lambda \rho y = 0.$$

Der Beweis erfolgt — wegen der Übergangsbedingungen — nicht auf dem im Fall des Sturm-Liouvilleschen Problems üblichen Wege, sondern wird mit Hilfe der Integralgleichung der Stabschwingungen erbracht. Aus ihr wird der Verlauf einer Funktion  $y(0, \lambda)$  erschlossen, die die Amplitude eines Stabendes angibt, das frei ist oder durch Entfernung einer Stütze frei gemacht wird, und an dem eine periodisch wirkende Kraft veränderlicher Frequenz  $\sqrt{\lambda}$  angreift. Unter den bei einer solchen erzwungenen Schwingung möglichen Stabformen befinden sich auch die Eigenschwingungsformen für den Stab mit freiem oder gestütztem Ende. Der Verlauf der Funktion  $y(0, \lambda)$  lehrt, daß zwischen je zwei Eigenschwingungszahlen ein weiterer Knoten in das System hineinwandert. Außerdem wird gezeigt, daß die einmal vorhandenen Knoten auf keine Weise sich wieder entfernen können. Das Verfahren ist zunächst an frequenz-unabhängige Übergangsbedingungen geknüpft; es läßt sich also auf Schwingungen z. B. von Rahmenträgern nicht ohne weiteres übertragen.

*K. Klotter (Karlsruhe).*

**Boehm, Karl:** Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einer Störungsfunktion. *Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abh.* **16**, 1—14 (1931).

Eine lineare Differentialgleichung  $M$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird symbolisch in der Gestalt

$$f(D)y = \psi(x)$$

geschrieben. Dabei ist  $f(D) = \prod_{i=1}^n (D - \lambda_i)^{m_i}$  ein Polynom in  $D$  vom Grade  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Setzt man  $f_1(D) = f(D)/(D - \lambda_1)$ , wobei  $f_1(D)$  ein Polynom vom Grade  $M - 1$  ist, so läßt sich die ursprüngliche Differentialgleichung als Differentialgleichung 1-ter Ordnung

$$(D - \lambda_1)z = \psi(x)$$

für die Funktion  $z = f_1(D)$  auffassen; sie besitzt die Lösung

$$z = f_1(D)y = e^{\lambda_1 x} \int_a^x e^{-\lambda_1 u} \psi(u) du = \psi_1(x),$$

so daß für  $y$  eine Differentialgleichung  $(M-1)$ ter Ordnung gewonnen ist. Die Wiederholung des hiermit eingeleiteten Rekursionsverfahrens liefert die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung. Nach diesem Verfahren wird zunächst die Lösung der homogenen Differentialgleichung  $f(D)y = 0$  dargestellt und sodann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung konstruiert. Ausführlicher untersucht werden insbesondere die Fälle

$$f(D) = (D - \lambda_1)^{m_1}, \quad f(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \quad \text{und} \quad f(D) = \prod_{i=1}^n (D - \lambda_i).$$

Lüneburg (Göttingen).

**Bochner, S.: Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind. III. Tl.: Systeme von Gleichungen. Math. Annalen 104, 579–587 (1931).**

Au sujet des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques quelques résultats ont déjà été obtenus par divers auteurs: tous ont pour objet la résolution du problème suivant: trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une solution d'un système soit composée de fonctions presque-périodiques. Les résultats obtenus jusqu'ici dans cette voie ne sont pas très maniables en ce sens qu'ils ne fournissent pas de critères permettant de trancher la question par l'affirmative au moins dans des cas particuliers. Bochner comble cette lacune pour les systèmes à coefficients constants. Soit le système:

$$y'_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^m a_{\mu\nu} y_\nu(x) + f_\mu(x) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

où les  $a_{\mu\nu}$  sont des constantes et les  $f_\mu(x)$  des fonctions presque-périodiques. L'auteur donne d'abord une nouvelle démonstration du fait que toute solution bornée de ce système est presque-périodique. Désignant ensuite par  $G(\lambda)$  le polynome:

$$G(\lambda) = |ie_{\mu\nu}\lambda - a_{\mu\nu}| \quad \left( i^2 = -1; e_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} \right)$$

B. démontre que, pour que le système précédent ait une solution presque-périodique il est suffisant que l'une des hypothèses suivantes soit réalisée: 1.  $G(\lambda)$  n'a pas de racine réelle, 2. à chaque racine réelle  $\lambda$  de  $G(\lambda)$  d'ordre  $l$  correspond à tout indice  $\mu$  une fonction presque-périodique dont la dérivée  $l^{\text{e}}$  est  $e^{-i\lambda x} f_\mu(x)$ . La démonstration de cette proposition se fait au moyen de la théorie des multiplicateurs exposée par l'auteur dans la première partie de son travail; cette théorie lui permet aussi de formuler des résultats analogues aux précédents pour des équations aux différences ou aux dérivées et aux différences mêlées et à coefficients constants. J. Favard (Grenoble).

**Reid, William T.: Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations. Amer. J. Math. 53, 443–459 (1931).**

Es wird ein kompatibles System von  $n$  linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y'_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

( $A_{ij}$ ,  $y_i$  sind reelle oder komplexe, Lebesgue-summierbare Funktionen der reellen Variablen  $x$ ) mit den Randbedingungen

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} y_j(a) + \sum_{j=1}^n N_{ij} y_j(b) = 0$$

betrachtet. Es wird gezeigt, daß für jedes solche System verallgemeinerte „Greensche Matrizen“ existieren. Es werden eine Reihe von Eigenschaften dieser Matrizen abgeleitet, insbesondere werden sie zur Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems verwendet. Rellich (Göttingen).

**Reid, William T.:** Note on an infinite system of linear differential equations. *Ann. of Math.*, II. s. **32**, 37—46 (1931).

Der Verf. zeigt, daß die Ergebnisse seiner kürzlich in den *Trans. amer. math. Soc.* **32**, 284—318 (1930) erschienenen Arbeit, die den ausschlaggebenden Schwarz-Hilbertschen Fall  $p = 2$  behandelt hat, nach dem geläufigen, von Landau, F. Riesz und Radon entwickelten Übertragungsprinzip ohne Schwierigkeit auf den Fall eines beliebigen Hölderschen Exponenten  $p > 1$  verallgemeinert werden können. *Wintner*.

**Gosse, R.:** De l'intégration d'une équation de la première classe. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1348—1350 (1931).

**Cibrario, Maria:** Su una trasformazione per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. *Boll. Un. mat. ital.* **10**, 73—76 (1931).

Es werden Differentialgleichungen der Form  $Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} = D$  ( $A, B, C, D$  sind Funktionen von  $x, z, y, z_x, z_y$ ) aufgesucht, die sich durch eine Transformation

$\xi = x, \eta = \int_{x_0 y_0}^{x, y} \varphi(x, y, z, z_x, z_y) dx + \psi(x, y, z, z_x, z_y) dy$  auf die Gestalt  $z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$

bzw.  $z_{\xi\eta} = 0$  bringen lassen.

*Rellich* (Göttingen).

**Rothe, Erich:** Über die Grundleistung bei parabolischen Gleichungen. *Math. Z.* **33**, 488—504 (1931).

Verf. behandelt die parabolische Differentialgleichung

$$L(z) - R \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (R = R(y_1, y_2, y_3) \geq m > 0)$$

wobei  $L(z)$  ein selbstadjungierter elliptischer Ausdruck in den 3 Veränderlichen  $y_1, y_2, y_3$  ist. Sind  $\lambda_K$  die Eigenwerte,  $u_K(y)$  die normierten Eigenfunktionen des Problems

$$L(u_K) + \lambda_K R u_K = 0$$

im betrachteten Gebiet  $B$  des  $y$ -Raumes (mit  $u_K = 0$  am Rande), so zeigt sich nach einer Umformung, daß

$$\Gamma(y, \eta, x - \xi) = \sum_{K=1}^{\infty} u_K(y) u_K(\eta) e^{-\lambda_K(x-\xi)} \quad (x > \xi)$$

die gesuchte Grundleistung darstellt. Für sie gilt dasselbe Analogon zur Randdarstellung und zur Poissonschen Formel der Potentialtheorie wie bei der Wärmeleitungsgleichung. Die Funktion

$$u(x, y) = \int_B u_0(\eta) \Gamma(y, \eta, x) d\eta \quad (x > 0)$$

löst die Randwertaufgabe für einen Zylinder des  $y_1, y_2, y_3, x$ -Raumes mit  $B$  als Grundfläche und der Achse parallel zur  $x$ -Achse, mit den Randwerten:  $u_0(y)$  im Inneren von  $B$ , Null auf dem Zylindermantel.

*Willy Feller* (Kiel).

**Kellogg, Oliver D.:** On the capacity of sets of Cantor type. *Amer. J. Math.* **53**, 475—482 (1931).

Gegeben sei im Raume eine beschränkte Menge  $E$ . Ihre abgeschlossene Hülle  $\bar{E}$  enthält die Begrenzung eines unbeschränkten Gebietes  $T$ . Ist in  $E$  eine stetige Funktion definiert, so gibt es stets eine Lösung des Dirichletschen Problems in dem Sinne, daß man den Vorgaben eindeutig eine in  $T$  reguläre harmonische Funktion zuordnen kann. Setzt man nämlich die Randwerte irgendwie stetig in den Raum fort und approximiert  $E$  durch eine Folge regulärer Flächen, so entsteht eine Folge im eigentlichen Sinne lösbarer Randwertaufgaben, und die Lösungen konvergieren unabhängig von der Wahl der approximierenden Flächen und der Art der Fortsetzung der Randwerte gegen die gesuchte Lösung. Die Frage nach der Annahme der Randwerte wird zurückgeführt auf den speziellen Fall des sog. Konduktorpotentials, d. h. der Lösung mit den Randwerten 1. Strebt diese bei Annäherung an einen Punkt von  $E$  gegen 1, so heißt dieser Punkt regulär; ebenso sind regulär alle Punkte von  $E$ , die nicht Randpunkte des Gebietes  $T$  sind. Die Lösungen nehmen nun immer in den regulären Punkten die vorgeschriebenen Randwerte an, während die Vorgabe der Randwerte in den irregulären

Punkten belanglos ist. Bei Mengen, die nur irreguläre Punkte enthalten, hat es somit keinen Sinn, die Randwertaufgabe zu stellen (z. B. ergibt sich, wenn  $E$  nur aus einem Punkte besteht, immer die „Lösung“ Null). Daher ergibt sich die Frage, welche Mengen reguläre Punkte enthalten. Verf. vermutete bereits 1926 (und bewies 1928 für den Fall des logarithmischen Potentials) den Satz, daß jede Menge von positiver Kapazität reguläre Punkte enthält (unter Kapazität von  $E$  versteht man das Integral über die Normalableitung des Konduktorpotentials, erstreckt über eine  $\bar{E}$  ganz enthaltende geschlossene Fläche, dividiert durch  $4\pi$ ). Die Vermutung gewinnt an Bedeutung dadurch, daß aus ihr folgen würde, daß es nicht zwei verschiedene in  $T$  reguläre harmonische Funktionen geben kann mit denselben Randwerten in den regulären Punkten von  $E$ . Die Vermutung wird nun wenigstens für recht allgemeine Mengen vom „Cantorschen Typus“ bewiesen. Das sind die Grenzengen, die entstehen, wenn man aus dem Einheitswürfel diejenigen Punkte entfernt, die von den 3 Hauptsymmetrieebenen um weniger als  $\alpha_1/2$  entfernt sind, aus den verbleibenden 8 Würfeln mit der Kantenlänge  $\delta_2 = \frac{1-\alpha_2}{2}$  wiederum die Punkte, die von den neuen Symmetrieebenen um weniger als  $\alpha_2\delta_2$  entfernt sind usw., wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  eine beliebige Zahlenfolge mit  $0 < \alpha_k < 1$  bedeutet. Aus einigen Abschätzungen ergibt sich als notwendige Bedingung dafür, daß die Kapazität der Menge nicht Null ist, die Konvergenz einer Reihe, deren Glieder von den  $\alpha_k$  abhängen. Aus einem Kriterium von Wiener, das die Frage nach der Regularität eines Punktes auf die Betrachtung der Kapazität der Umgebung zurückführt, folgt eine hinreichende Bedingung für die Regularität. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Vermutung, wenn die Folge  $\alpha_i$  eine positive untere Schranke besitzt oder aber eine Nullfolge ist. Die anderen Fälle bleiben unerledigt. Ferner folgt, daß jede beschränkte abgeschlossene Menge mit positivem äußeren Jordanschen Maß reguläre Punkte enthält, während aber umgekehrt z. B. die Cantorsche Menge mit  $\alpha_k = \frac{1}{2}$  für alle  $k$ , das äußere Maß Null hat und doch reguläre Punkte enthält. (Vgl. für Begriffsbildung und Literatur: D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, Kap. XI. Berlin 1929.)

Willy Feller (Kiel).

**Evans, G. C., and E. R. C. Miles: Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems.** (*Rice Inst., Houston, Texas.*) *Amer. J. Math.* **53**, 493–516 (1931).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Dirichletschen und Neumannschen Problems für eine Fläche im Raum. Gegeben sind die additiven Funktionen  $F(w)$  und  $G(w)$ , die für alle von regulären Kurven eingeschlossenen Punktmengen auf der Fläche  $S$  definiert sind. Gesucht werden 2 Potentialfunktionen  $u$  und  $v$ , für welche die über eine benachbarte Fläche  $S'$  erstreckten Integrale  $\int_{w'} u d\omega$  bzw.  $\int_{w'} \frac{dv}{dn} d\omega$  bei dem

Grenzübergang  $S' \rightarrow S$ ,  $w' \rightarrow w$  die Grenzwerte  $F(w)$  und  $G(w)$  haben. Die Lösungen werden in der Form allgemeiner Potentiale von einer einfachen und doppelten Schicht erhalten:

$$v(M) = \int_S \frac{1}{MP} d\mu(e_P),$$

$$u(M) = \int_S \frac{\cos(MP, n_P)}{MP^2} d\nu(e_P).$$

Hier sind  $\mu(e)$  und  $\nu(e)$  vollständig additive Mengenfunktionen auf  $S$ , die den Stieltjes-schen Integralgleichungen

$$\nu(w) = -\frac{\lambda}{2\pi} F(w) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_S d\nu(e_P) \int_{\omega} \frac{\cos(QP, n_Q)}{QP^2} d\omega_Q,$$

$$\mu(w) = \frac{\lambda}{2\pi} G(w) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_S d\mu(e_P) \int_{\omega} \frac{\cos(QP, n_Q)}{QP^2} d\omega_Q$$

genügen. Diese Gleichungen können auf gewöhnliche Integralgleichungen zurückgeführt werden und man erhält hierdurch den folgenden Hauptsatz: Wenn  $U(0+, w)$  und  $U(0-, w)$  die äußeren und inneren Randwerte von  $u(M)$  bezeichnen, so sind die Lösungen der Probleme

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda} U(0+, w) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} U(0-, w) = F(w),$$

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda} V(0-, w) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} V(0+, w) = G(w)$$

vorhanden und eindeutig, falls  $\lambda$  nicht mit einem Eigenwert des Kerns

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\cos(QP, n_P)}{QP^2}$$

zusammenfällt.  $\lambda = 1$  ist kein Eigenwert. Die Neumann-Dirichletschen Probleme

$$U(0+, w) = F(w), \quad V(0-, w) = G(w)$$

haben also eindeutige Lösungen.  $\lambda = -1$  ist ein Eigenwert, und das Problem kann nur gelöst werden, wenn

$$\int_S \Phi_2(P) dF(e_P) = 0,$$

wobei  $\Phi_2(P)$  eine Lösung der homogenen Integralgleichung mit dem betrachteten Kern bezeichnet. Die Funktionen  $F(w)$  und  $G(w)$  werden mit „regulären Unstetigkeiten“ vorausgesetzt. Die Fläche  $S$  hat eine stetige Tangentenebene und erfüllt eine sehr allgemeine Krümmungsbedingung. L. Ahlfors (Åbo).

**Raynor, G. E.:** On the Dirichlet-Neumann problem. Ann. of Math., II. s. 32, 17–22 (1931).

Verf. behandelt folgende Verallgemeinerung der klassischen Randwertaufgaben: gegeben sind die Randwerte und die Werte der Normalableitung am Rande eines Bereiches von endlichem Zusammenhangsgrad; gesucht wird eine Funktion, die beiden Randbedingungen genügt und im Inneren des Bereiches mit Ausnahme eines vorgegebenen Punktes harmonisch ist. Aus der Darstellung der harmonischen Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle, die Verf. im Bull. amer. Math. Soc. 32 (1926 bis 1927) gegeben hat, schließt er auf die Eindeutigkeit der Lösung. Ein Existenzsatz fehlt. Für den Fall eines Kreises hat Hölder [Lpz. Ber. 63 (1911)] notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz abgeleitet. Bei einfach zusammenhängenden Bereichen mit rektifizierbarer Randkurve kann daher durch konforme Abbildung über die Existenzfrage entschieden werden. Willy Feller (Kiel).

**Littlewood, J. E.:** Mathematical notes (9): On functions subharmonic in a circle (III). Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 222–234 (1931).

Für eine in  $r < 1$  subharmonische [F. Riesz, Acta Math. 48, 329–343 (1926)] Funktion  $w(r, \Theta)$  zeigte Littlewood [J. Lond. Math. Soc. 2, 192–196 (1927)]: Wenn

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |w(r, \Theta)|^p d\Theta = O(1) \quad (*)$$

für ein  $p > 1$  erfüllt ist, dann existiert eine Funktion  $W(\Theta)$ , gegen die  $w(r, \Theta)$  für jedes  $q < p$  „stark konvergiert“, d. h.

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |w(r, \Theta) - W(\Theta)|^q d\Theta = 0.$$

Ferner [Proc. Lond. Math. Soc., II. s. 28, 383–384 (1929)]: Wenn (\*) für ein  $p \geq 1$  erfüllt ist, dann hat  $w(r, \Theta)$  fast überall einen radialen Grenzwert, und dieser ist im Falle  $p > 1$  identisch mit  $W(\Theta)$ . Diese Ergebnisse werden in der vorliegenden Note vervollständigt: „Die Funktion  $w(r, \Theta)$  sei subharmonisch in  $r < 1$  und genüge (\*). Wenn  $p \geq 1$  ist, dann existiert fast überall eine radiale Grenzfunktion  $W(\Theta) = \lim_{r \rightarrow 1} w(r, \Theta)$ ,“

und  $W(\Theta)$  ist eine starke Grenzfunktion von  $w(r, \Theta)$  für jedes  $q < p$ . Wenn  $p > 1$  ist, braucht eine starke Grenzfunktion mit dem Index  $q = p$  nicht zu existieren; wenn jedoch  $w(r, \Theta)$  harmonisch ist, dann ist  $W(\Theta)$  eine solche. Wenn  $p = 1$  ist, braucht eine starke Grenzfunktion mit dem Index  $q = p (= 1)$  nicht zu existieren, selbst dann nicht, wenn  $w(r, \Theta)$  harmonisch ist. Wenn  $p < 1$  ist, braucht weder eine starke Grenzfunktion für irgendeinen Index, noch eine radiale Grenzfunktion fast überall zu existieren.“

R. Schmidt (Kiel).

### Theorie der analytischen Funktionen:

**Julia, Gaston:** Sur quelques majorantes utiles dans la théorie des fonctions analytiques ou harmoniques. Ann. sci. École norm. supér., III. s. 48, 15–32 u. 33–64 (1931).

Julia gibt zunächst einen neuen Beweis für einen Satz von Carleman (Les fonctions quasi analytiques, Paris 1926, 3–5); potentialtheoretische Hilfsmittel führen unter anderem zu folgendem allgemeineren Satze: Der Bereich  $D$  sei begrenzt durch 2 vom Anfangspunkt 0 ausgehende Strecken  $OA$  und  $OB$  mit dem Winkel  $\alpha\pi$ , und durch einen Jordanbogen  $\widehat{AB}$ ; die Funktion  $f(z)$  sei regulär innerhalb  $D$  und auf dem Rande; auf den Strecken sei  $|f(z)| \leq M$ , auf dem Bogen sei  $|f(z)| \leq m$ ,  $m < M$ .  $R$  sei die größte Entfernung eines Randpunktes von 0;  $\omega$  sei der Winkel, den ein Vektor  $Oz$  mit der Winkelhalbierenden bildet ( $|\omega| < \alpha\pi/2$ ); sei  $|z| = \varrho$ . Dann ist in  $D$

$$\log \left| \frac{f(z)}{M} \right| < \log \left( \frac{m}{M} \right) \cdot \left( \frac{\varrho}{R} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \cos \frac{\omega}{\alpha}.$$

J. findet auch schärfere Abschätzungen und entsprechende Sätze für den Fall  $m > M$ . Das 2. Kapitel bringt analoge Abschätzungen für allgemeinere Bereiche, die nur von endlich vielen Jordanbögen begrenzt sind; hierin sind bekannte Sätze (Nevanlinna, Ostrowski) enthalten.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

**Borofsky, S.:** Expansion of analytic functions into infinite products. Ann. of Math., II. s. 32, 23–36 (1931).

Der Inhalt der Arbeit besteht in dem Beweis des folgenden sehr allgemeinen Satzes: Es sei die analytische Funktion  $f(z)$  für  $\Re(z) > x_0$  entwickelbar in die absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\beta_k z} \quad \text{mit} \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots \quad (1)$$

Man bilde auf alle überhaupt möglichen Arten die Zahlen  $\lambda = \delta_1 \beta_{p_1} + \delta_2 \beta_{p_2} + \dots + \delta_m \beta_{p_m}$ , wo für  $m = 1, 2, 3, \dots$  jedesmal  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$  irgendwelche ganze Zahlen  $\geq 0$  und die  $\beta_{p_1}, \beta_{p_2}, \dots, \beta_{p_m}$  irgendwelche  $m$  der  $\beta$  in (1) bedeuten. Diese Menge der (nichtnegativen) Zahlen  $\lambda$  sei der Größe nach geordnet:  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , und es sei

$$D(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z} \quad \text{mit} \quad d_0 \geq 1, \quad d_{\nu} \geq 0 \quad (2)$$

irgendeine in einer rechten Halbebene konvergente Reihe. Ferner sei für  $i = 1, 2, 3, \dots$  eine beliebige Funktionsfolge  $f_i(z)$  festgelegt durch

$$f_i(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(i)} e^{-\lambda_{\nu} z} \quad \text{mit} \quad c_0^{(i)} = 1, \quad |c_{\nu}^{(i)}| \leq d_{\nu}; \quad (3)$$

im übrigen sind die  $c_{\nu}^{(i)}$  beliebig. Endlich sei  $m_1, m_2, \dots$  irgendeine Folge positiver ganzer Zahlen. Dann läßt sich stets die Ausgangsfunktion  $f(z)$  in folgender Weise als ein unendliches, in einer rechten Halbebene konvergierendes Produkt darstellen:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + w_n f_n(z) e^{-\lambda_n z}]^{m_n}, \quad (4)$$

wobei die  $w_n$  Konstanten sind. Bedeutet noch  $F_i(z)$  die Funktion  $F_i(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu}^{(i)}| e^{-\lambda_{\nu} z}$ , so ist in dieser selben Halbebene das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + m_n |w_n| F_n(z) e^{-\lambda_n z} + \frac{m_n(m_n - 1)}{1 \cdot 2} |w_n|^2 F_n^2(z) e^{-2\lambda_n z} + \dots \right. \\ \left. + |w_n|^{m_n} F_n^{m_n}(z) e^{-m_n \lambda_n z} \right\}$$

gleichmäßig konvergent. Bei festgelegten  $m_n$  und  $f_n(z)$  sind die  $w_n$  und  $\lambda_n$  eindeutig bestimmt. Hieraus ergeben sich einige besonders wichtige und interessante Spezialfälle: 1. Wählt man alle  $m_n = 1$ , alle  $f_n(z) = 1$  und setzt  $e^{-z} = u$ , so folgt das von J. F. Ritt (Math. Z. **32**, 1) angegebene Theorem, daß jede analytische Funktion  $\Phi(u)$  mit  $\Phi(0) = 1$  in der Umgebung der Stelle 0 in das unendliche Produkt

$$\Phi(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z^n)$$

entwickelt werden kann. 2. Wählt man wieder alle  $m_n = 1$ , aber

$$f_n(z) = 1 + e^{-nz} + e^{-2nz} + e^{-3nz} + \dots$$

und setzt  $e^{-z} = u$ , so folgt: Jede Funktion  $\Psi(u)$ , die sich als

$$\Psi(u) = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots$$

entwickeln läßt, kann als unendliches Produkt

$$\Psi(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + w_n \frac{u^n}{1 - u^n} \right]$$

dargestellt werden. Das ist ein Analogon zu den von Knopp 1913 aufgestellten Lambertschen Reihen (J. f. Math. **142**, 288). 3. Es seien wieder alle  $m_n = 1$ ,  $e^{-z} = u$ , aber  $f_n(z) = 2^n n! J_n(u) u^{-n}$ , wo die  $J_n(u)$  die Besselschen Funktionen bedeuten. Dann folgt für jede Funktion  $\Psi(u) = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots$  die Darstellbarkeit

$$\Psi(u) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + w_n J_n(u)].$$

Der § 2 dient zur Vorbereitung für den Konvergenzbeweis. Da in der anfangs gebildeten Reihe der  $\lambda$  mit jedem  $\lambda^*$  auch jedes ganzzahlige Vielfache von  $\lambda^*$  auftritt, so ist jede  $k$ -te Potenz von (2) wieder eine Dirichletsche Reihe derselben Form; es ist also, wenn (2) für  $\Re(z) \geq R$  konvergiert und  $D(R) \leq M$  ist,

$$\left( \frac{D(z)}{2M} \right)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{k\nu} e^{-\lambda_{\nu} z}; \quad g_i^{(k)}(z) = \left( \frac{f_i(z)}{2M} \right)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{k\nu}^{(i)} e^{-\lambda_{\nu} z}. \quad (5)$$

Ferner läßt sich wegen (1) die Reihe

$$\log f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} z} \quad (6)$$

bilden. Aus der Darstellung (4) folgt nun

$$\log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varrho+1}}{\varrho} w_n^{\varrho} f_n^{\varrho}(z) e^{-\varrho \lambda_n z}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten mit denen von (6) liefert, daß  $b_n = m_n g_{10}^{(n)} w_n$  ist oder sich darstellt als zusammengesetzt aus  $m_n g_{10}^{(n)} w_n$  plus einer gewissen Verbindung der  $m_1, \dots, m_{n-1}; w_1, \dots, w_{n-1}$ . In § 3 wird in einer längeren Rechnung gezeigt, daß es ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß  $|m_n w_n| \leq e^{\lambda_n \sigma}$  für jedes  $n$  gilt. Für  $\sigma$  wird ein bestimmter Ausdruck angegeben. Daraus wird in § 4 allgemein gefolgert, daß stets  $\sum_{n=1}^{\infty} |m_n w_n| e^{-\lambda_n x}$  für  $x > X$  konvergiert. Hiermit kann der Konvergenzbeweis leicht zu Ende geführt

werden; denn es ist (4) in der zu Anfang geschilderten Weise konvergent, wenn

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{|m_n w_n G_n(z)|} e^{-\lambda_n z} \quad \text{mit} \quad G_n(z) = F_n(z)/2M$$

gleichmäßig konvergiert, und das folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} |m_n w_n| e^{-\lambda_n z}$ . In § 5 wird gezeigt, daß diese letzte Summe sicher in einer gewissen Halbebene konvergiert, wenn  $\limsup \log n / \lambda_n$  endlich ist und daß dies der Fall ist, sobald  $\limsup \log n / \beta_n$  endlich ist. *G. Wiarda* (Dresden).

**Valiron, Georges:** Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan. Bull. Sci. math., II. s. 55, 105—128 (1931).

Die Funktion  $f(z)$  sei regulär für  $\Re z > 0$ , ferner sei

$$\Re f(z) > 0, \quad f_1(z) \equiv f(z), \quad f_n(z) \equiv f[f_{n-1}(z)];$$

dann existiert bekanntlich (Koenigs, Wolff, Denjoy) — abgesehen von einem Ausnahmefall — der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = a, \quad 0 \leq a \leq \infty.$$

Ferner existiert (nach Wolff) eine Konstante  $c \geq 0$ , so daß

$$f(z)/z \rightarrow c \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty \quad (z = x + iy)$$

gleichmäßig im Winkelbereich  $|y| \leq kx$ ,  $k > 0$ . Im Falle  $a = \infty$  ist  $c \geq 1$ . Für diese und einige weitergehende Sätze gibt Valiron einfache Beweise. *Otto Szász* (Frankfurt/M.).

**Mandelbrojt:** Sur les fonctions holomorphes et bornées dans un demi-plan. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1075—1077 (1931).

Dans cette note l'auteur donne une démonstration des propositions qu'il a obtenues en employant les procédés de la théorie des fonctions quasi analytiques. Il énonce notamment ces deux théorèmes, où  $x = Rz$ ,  $y = Jz$ : I.  $F(z)$  étant holomorphe bornée pour  $x \geq 0$ , si pour un choix convenable de la primitive de rang  $n$  de  $F(z)$ , on a, pour chaque  $n \geq 0$ ,

$$|F^{(-n)}(iy)| < m_n < \infty \quad \text{pour} \quad |y| > n$$

et si, pour  $n$  croissant indéfiniment

$$\liminf. \sqrt[n]{m_n} = 0. \quad (1)$$

$F(z)$  est identiquement nulle. II. Si  $F(z)$  est une fonction entière,  $a$  positif,  $F(x) \neq 0$  pour  $x > 0$  et si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |F(x)|}{x} = a, \quad |F(z)| < M e^{ax} \quad (x > 0);$$

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \left[ \text{borne sup. } |F(z)| \right]_{x=c} = 0; \quad |F^{(n)}(iy)| < m_n < \infty,$$

on a pour  $n$  croissant indéfiniment

$$\liminf. \sqrt[n]{m_n} > 0. \quad (2)$$

Les conditions (1) et (2) ne peuvent être remplacées par d'autres, mais l'auteur montre que, dans I, la première hypothèse peut être resserrée. Remarquons que II reste vrai si, conservant les conditions relatives à  $x \geq 0$  on suppose seulement  $F(z)$  d'ordre inférieur à 1 pour  $x < 0$  et la démonstration devient très simple; mais l'énoncé de Mandelbrojt s'applique à l'ordre infini. M. donne également le théorème suivant qui se rattache au problème de Watson (Carleman, Les fonctions quasi analytiques, p. 40; Ostrowski, Acta math. 53): si  $F(z)$  étant non identiquement nulle, holomorphe pour  $x > d$ , bornée dans chaque bande  $d < x < d'$  et si

$$\text{borne sup. } |F(z)| \leq M'_n c^{-n}, \quad d < c < \infty,$$

il existe un nombre  $k$  positif tel que  $M'_n > (kn)^n$ . La démonstration est élémentaire.

*G. Valiron* (Strasbourg).

**Montel, Paul:** Sur les couples de polynomes dont les zéros sont entrelacés. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1014—1015 (1931).

The zeros of two polynomials  $P(z)$  and  $Q(z)$  of the same degree are said to be interlaced on the curve  $C$ , if each arc of  $C$ , limited by zeros one polynomial, contains a simple zero of the other. The rational function  $R(z) = P(z)/Q(z)$  is then called termwise interlaced. The author considers the properties of such functions  $R(z)$  from the point of view of normal families and with respect to composition and iteration. No proofs are given. — If  $C$  is such that the number of normals which may be drawn to it from any point of the plane is bounded, and if  $\{R(z)\}$  is an infinite family of rational functions termwise interlaced on  $C$ , then the family is normal in the several parts of the plane determined by  $C$ . — Let  $C$  be the real axis. If  $R(z)$  and  $S(z)$  are termwise interlaced on the real axis, then  $R[S(z)]$  has the same property. In particular, all the iterates of  $R(z)$  are interlaced on the real axis. — These definitions may be extended to non-rational meromorphic functions. The meromorphic functions whose zeros and poles are interlaced on the real axis and which are limit functions of rational functions having the same property, are of special interest. Hille (Princeton, N.J.).

**Haenzel, Gerhard:** Zur Theorie der elliptischen Integrale erster Gattung. Mh. f. Math. **38**, 109—116 (1931).

Ziel des Verf. ist die geometrische Deutung gewisser einfacher Tatsachen aus der Theorie der Invarianten und Kovarianten der binären biquadratischen Formen, die unter anderem auch bei der algebraischen Behandlung von 2 äußerst speziellen Transformationen elliptischer Integrale Anwendung finden. Die erste dieser Transformationen ist die berühmte von Hermite 1854 entdeckte, die ein beliebiges elliptisches Integral 1. Gattung auf die Weierstraßsche Normalform bringt. Heißt das gegebene Integral homogen geschrieben

$$\int \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{f(x_1, x_2)}},$$

wo  $f$  eine binäre Form 4. Grades ist, so entstehen die 3 im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte des durch die Hermite'sche Transformation hervorgehenden Normalintegrals aus den 3 Nullstellenpaaren der Kovariante 6. Grades  $T$  der Form  $f$ . Verf. gibt nun eine geometrische Konstruktion, um aus den Nullstellen von  $f$  die Nullstellenpaare von  $T$  zu gewinnen. Sie besitzt aber nicht einmal die von der Natur der Aufgabe verlangte Invarianz. Sodann untersucht der Verf. die Besonderheiten, die bei einem reellen  $f$  eintreten. — Die andere vom Verf. untersuchte Transformation ist eine solche 3. Grades, die er im Anschluß an Hermite und Cayley ansetzt. Störend sind die zahlreichen Druckfehler in den Formeln. Die grundlegende, in der gleichen Zeitschrift **35** (1928), erschienene Abhandlung E. Studys, in der die Beziehungen der binären Invariantentheorie zur Theorie der elliptischen Funktionen — insbesondere auch die Hermite'sche Transformation — mit wohl erschöpfender Ausführlichkeit behandelt sind, ist anscheinend dem Verf. unbekannt geblieben. Bessel-Hagen (Bonn).

**Maier, W.:** Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen. J. f. Math. **164**, 85—111 (1931).

In der Arbeit wird eine neue, von den früheren Darstellungen wesentlich verschiedene Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen gegeben, indem die analytische Darstellung der genannten Funktionen in Verbindung mit den Bernoullischen Polynomen gesetzt wird. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die Kronecker'sche Funktion

$$s(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h, k}^n \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{u + h + \omega k},$$

die für  $|J(\omega)| \rightarrow \infty$  in die erzeugende Funktion

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v}^n \frac{e^{2\pi i v x}}{v}$$

der Bernoullischen Polynome übergeht. Diesen Polynomen entsprechen hier die durch die Reihen

$$t_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{h+k \\ \pm n}}^{0 < h^2 + k^2 \leq n} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{(h + \omega k)^\nu}$$

definierten  $t$ -Funktionen, auf welche die zwischen den Bernoullischen Polynomen geltenden Relationen unmittelbar übertragen werden können. Es wird u. a. gezeigt, daß das System der  $t$ -Funktionen eine endliche Basis hat, indem die betreffenden Funktionen rational durch 3 derselben, nämlich  $t_1, t_2, t_3$ , ausgedrückt werden können. Der Zusammenhang zwischen den  $t$ -Funktionen und den Jacobischen  $\vartheta$ -Funktionen wird durch die Formel

$$s(x, y) = e^{-2\pi i x u} \frac{\vartheta'(0) \vartheta(u + z)}{\vartheta(u) \vartheta(z)},$$

wo  $z = y - \omega x$ , vermittelt, woraus für die erstgenannten Funktionen die Integraldarstellung

$$t_n = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int \frac{e^{-2\pi i x v}}{v^n} \cdot \frac{\vartheta(v + z)}{\vartheta(v)} dv$$

erhalten wird. Die Bestätigung der Identitäten zwischen den  $t$ -Funktionen wird dadurch auf die klassische Transformationstheorie der  $\vartheta$ -Reihen zurückgeführt. Zur Bildung elliptischer Funktionen hat man nun von einem  $t$ -Polynom  $f(x, y)$  auszugehen und auf dasselbe die Operation

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y}$$

anzuwenden. Ist dann  $Df(x, y) = 0$  und verschwindet diese Funktion  $f$  nicht identisch, so ist sie elliptisch (Siegel'sches Prinzip). So wird z. B. für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion der Ausdruck

$$\wp(z) = t_1 + 2t_2$$

erhalten. Zum Abschluß wird die Beziehung der ausgeführten Untersuchungen zur Invariantentheorie erörtert.

Myrberg (Helsinki).

**Maier, Wilhelm: Theorie der  $t$ -Funktionen.** Math. Annalen **104**, 588–605 (1931).

Der Verf. selbst gibt folgende Zusammenfassung: „In seinen Arbeiten über elliptische und  $\vartheta$ -Funktionen hat der Verf. folgende Resultate erhalten: 1. Den Ausgangspunkt bildete die Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h^2 + k^2 \leq n} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{u + h + \omega k} = s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) \quad (1)$$

und ihre elementar zu beweisenden Funktionalgleichungen, die wichtige Relationen zwischen den elliptischen Funktionen zusammenfassen. Dadurch erscheint diese Reihe als Grundlage für den formalen Aufbau der elliptischen Funktionen geeignet. —

2. Setzt man

$$s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) = u^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} t_l u^{l-1}, \quad (2)$$

so ist, speziell mit  $\omega_1 y \omega_2 x = z$ ,

$$t_1 = \frac{-2\pi i}{\omega_1} x + \frac{1}{\omega_1} \frac{\vartheta'\left(\frac{z}{\omega_1}\right)}{\vartheta\left(\frac{z}{\omega_1}\right)}, \quad (3)$$

$$t_1^2 + 2t_2 = \wp(z), \quad (4)$$

$$-2t_1^3 - 6t_1 t_2 - 6t_3 = \wp'(z),$$

also  $\vartheta, \wp, \wp'$  aus gemeinsamer Quelle abgeleitet. — 3. Es sind  $t_1, t_2, \dots$  Fouriersche Reihen in  $x$  und  $y$ ; nach (3) und (4) gestattet also jede elliptische Funktion eine rationale Darstellung durch Fouriersche Doppelreihen, welche beide Periodizitäten zum Ausdruck bringen. — 4. In der vorliegenden Arbeit werden die Funktionen  $t_1, t_2, \dots$  unabhängig von (1) und (2) durch innere Eigenschaften definiert. Aus des Verf. Definitionen durch innere Eigenschaften seien die folgenden hervorgehoben:  $t_1 = t_1(x, y)$  ist bei

festen, den Ungleichungen  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$  genügenden Werten von  $\omega_1, \omega_2$  eine meromorphe Funktion von  $x$  und  $y$ , die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Singularitäten sind möglich nur für  $\omega_1 y \equiv \omega_2 x \pmod{\omega_1, \omega_2}$ ;

2. es gelte die Grenzgleichung  $\lim_{x, y \rightarrow 0} \left[ 2t_1(x, y) - t_1\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \right] = 0$ ,

3. die differentielle Koppelung  $\mathfrak{D}t_1 = -1$ , wo  $\mathfrak{D}$  den Operator  $\frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_2}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}$  bezeichnet,

4. und folgende Periodizität:  $t_1(x, y) = t_1(x+1, y) = t_1(x, y+1)$ .

Die Definition von  $t_2$  ergibt sich dann nach vorangehender Betrachtung der Argumentteilung in  $t_1$  folgendermaßen: Für jedes positive ganze  $\nu$  ist

$$t_1^2 + 2(1 - \nu^{-2})t_2 = \nu^{-2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_1^2\left(\frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu}\right).$$

Man kann statt dessen auch sagen: Die Funktion  $\varphi_\nu(x, y) = 2(1 - \nu^{-2})t_2(x, y)$  ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt als für reelle  $x, y$  endliche und die Periodizitätseigenschaften  $\varphi(x, y) = \varphi(x+1, y) = \varphi(x, y+1)$  besitzende Lösung der Differentialgleichung  $\mathfrak{D}\varphi(x, y) = 2(1 - \nu^{-2})t_1(x, y)$ ; die additive Konstante ist aus der Forderung

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^{\nu-1} t_2\left(\frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu}\right) = t_2(x, y)$$

zu fixieren. Sämtliche Funktionen  $t_\kappa(x, y)$  ( $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ ) lassen sich auch einheitlich durch folgende Forderungen definieren: Es sei  $t_0 = -1$  und für  $\kappa = 1, 2, \dots$   $\mathfrak{D}t_\kappa = t_{\kappa-1}$ , ferner gelte für  $\nu = 1, 2, \dots$  die Funktionalgleichung

$$t_\kappa = \nu^{\kappa-2} \sum_{\alpha, \beta \pmod{\nu}} t_\kappa\left(\frac{x+\alpha}{\nu}, \frac{y+\beta}{\nu}\right),$$

wo das Summationssymbol  $\sum_{\pmod{\nu}}$  so allgemein zu verstehen ist, daß die eingehenden Summationszeiger nicht nur ein volles Restsystem durchlaufen, sondern daß die Summe bestimmt ist allein durch die Restklassen. Aus diesen Definitionen werden die wichtigsten analytischen Darstellungen der Funktionen  $t_\kappa(x, y)$  und zahlreiche Formeln, die Zusammenhänge zwischen ihnen dartun, hergeleitet. *Bessel-Hagen* (Bonn).

**Fueter, Rud.:** Über automorphe Funktionen der Picardschen Gruppe. I. *Commentarii math. helvet.* **3**, 42–68 (1931).

Nach Poincaré wird jede in der komplexen  $z$ -Ebene uneigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Transformationen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (1)$$

eigentlich diskontinuierlich, wenn man die  $z$ -Ebene durch den über dieselbe konstruierten dreidimensionalen Halbraum und dementsprechend die Kreisverwandtschaften der Ebene durch die Kugelverwandtschaften des Raumes ersetzt, welche analytisch durch quadratische Transformationen der Cartesischen Koordinaten  $x_0, x_1, x_2$  repräsentiert werden. Diese Transformationen können aber auch durch den oben geschriebenen, für ihre Spur in der  $z$ -Ebene geltenden Ausdruck (1) dargestellt werden, wenn man mit  $z$  die reduzierte Quaternionenvariable

$$z = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 \quad (2)$$

versteht. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, Funktionen der Quaternionenvariablen (2) zu untersuchen, welche in bezug auf die gegebene Gruppe automorph sind. Der Kürze halber beschränkt sich der Verf. auf die bekannte Picardsche Gruppe, d. i. auf die Gruppe der linearen Substitutionen (1), wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ganze Zahlen des Körpers  $k(\sqrt{-1})$  sind, die der Bedingung  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  genügen. In dem vorliegenden

ersten Teil der Arbeit werden die Symmetrieverhältnisse, die Differenzierbarkeit der Komponenten der Funktion, sowie ihr Verhalten in den rationalen Punkten der  $z$ -Ebene untersucht. Letzteres ergibt sich durch wesentliche Verwendung der von Hecke benutzten Thetafunktionen, die zum Körper  $k(\sqrt{-1})$  gehören, wodurch es möglich wird, von gewissen für die Besselsche Funktion 3. Art geltenden asymptotischen Entwicklungen Gebrauch zu machen.

Myrberg (Helsinki).

### **Analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher:**

**Cartan, Henri:** Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique. J. de Math., IX. s. 10, 1—114 (1931).

In der Theorie der analytischen Funktionen zweier komplexen Veränderlichen treten an die Stelle, die der Kreis in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen einnimmt, die Kreiskörper. So war die nächstliegende Frage der bis dahin noch sehr unentwickelten Theorie der Abbildungen durch analytische Funktionen

$$\begin{aligned}w' &= f_1(w, z), & w &= u + iv, \\z' &= f_2(w, z), & z &= x + iy\end{aligned}$$

die Frage nach der Abbildbarkeit vorgegebener Bereiche des  $w$ - $z$ -Raumes auf Kreiskörper. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Lösung dieses Problems. Unter einem Kreiskörper mit dem Mittelpunkt  $(a, b)$  versteht Cartan einen Bereich, der 1. durch die Transformationen

$$\begin{aligned}w' - a &= (w - a)e^{i\vartheta}, \\z' - b &= (z - b)e^{i\vartheta}\end{aligned}$$

mit beliebigem reellen  $\vartheta$  in sich übergeht, 2. den Punkt  $w = a, z = b$  als inneren Punkt enthält. Es zeigt sich, daß jede Funktion  $f(w, z)$ , die analytisch (meromorph) in einem Kreiskörper ist, sich auch noch im kleinsten umfassenden sternartigen (in bezug auf den Mittelpunkt) Kreiskörper analytisch (meromorph) verhält. Auf einfache Weise gelingt es dem Verf. zu zeigen, daß nur lineare Transformationen beschränkte Kreiskörper mittelpunktstreu wieder in Kreiskörper überführen. (Die linearen Transformationen der Kreiskörper sind bekannt aus den Untersuchungen von Carathéodory und Blaschke). Im 3. Kapitel werden die allgemeinen kreissymmetrischen Bereiche eingeführt. Ein Bereich heißt  $(m, p)$ -cerclé —, wobei  $m$  und  $p$  zueinander teilerfremde ganze Zahlen sind —, wenn er die Transformationen

$$\begin{aligned}w' - a &= (w - a)e^{im\vartheta}, \\z' - b &= (z - b)e^{ip\vartheta}\end{aligned}$$

( $\vartheta$  beliebig reell) in sich zuläßt und  $(a, b)$  als inneren Punkt enthält. In allen Bereichen „ $(m, p)$ -cerclé ( $mp > 0$ )“ läßt sich eine dort reguläre Funktion nach Polynomen in  $w$  und  $z$  entwickeln. Eine besondere Ausnahmestellung nehmen die Bereiche „semicerclé“ (Hartogssche Bereiche)  $m = 1, p = 0$  (bzw.  $m = 0, p = 1$ ) ein. Die mittelpunktstreuen Transformationen der Bereiche „ $(m, p)$ -cerclé“ untereinander werden bestimmt. Es wird gezeigt: ein Bereich „ $(m, p)$ -cerclé“, der mittelpunktstreu auf einen Kreiskörper abbildbar ist, läßt sich sogar auf einen Reinhardtischen Kreiskörper abbilden. Im allgemeinen ist ein Bereich „ $(m, p)$ -cerclé“ nicht mittelpunktstreu auf einen Kreiskörper abbildbar. Sodann wird der Hauptsatz aufgestellt: Jeder beschränkte Bereich  $D$  (nicht-schlichte Bereiche sind dabei auch zugelassen), der unendlich viele eindeutige Transformationen mit einem und demselben Fixpunkt  $O$  in sich gestattet, läßt sich analytisch auf einen Bereich „ $(m, p)$ -cerclé“ abbilden, wobei dann ein solcher Punkt  $O$  in den Mittelpunkt übergeht. In diesem Satze werden weder über den Rand des Bereiches noch über seine topologische Struktur Voraussetzungen getroffen. Der Beweis des Satzes läuft auf die Untersuchung der geschlossenen Lieschen Gruppen homogener linearen Substitutionen und der zu ihnen gehörigen invarianten Hermiteschen Formen hinaus. Ist die Gruppe der obigen

Transformationen mit dem Fixpunkt  $O$  wirklich 2-parametrig, so ist  $D$  auf einen Reinhardtschen Körper abbildbar; ist die Gruppe 3-parametrig, so ist sie auch gleich 4-parametrig ( $D$  läßt sich dann auf die Hyperkugel abbilden). Im letzten Kapitel wird an einem Beispiel gezeigt, daß es Bereiche gibt, die nicht unendlich viele Transformationen in sich aufweisen, wie es der Hauptsatz verlangt. Schließlich werden noch die „domaines maxima“ (Vollkörper) unter den Kreiskörpern behandelt. Domaine maximum heißt ein Bereich, wenn es in ihm reguläre, aber über ihn hinaus nicht fortsetzbare Funktionen gibt. Zu jedem Kreiskörper  $K$  gibt es einen ihn umfassenden Bereich  $\tilde{K}$  (Regularitätshülle) mit den Eigenschaften: 1. Alle in  $K$  regulären Funktionen sind auch noch in  $\tilde{K}$  regulär. 2.  $\tilde{K}$  ist der kleinste  $K$  umfassende Bereich „domaine maximum“ ( $\tilde{K}$  ist selbst wieder ein Kreiskörper).

Behnke (Münster i. W.).

**Cartan, Henri:** Les transformations des domaines semi-cerclés bornés. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 869—871 (1931).

Mit den gleichen Methoden, wie er sie zusammen mit E. Cartan zur Untersuchung der Abbildungen der Kreiskörper benutzt hat [vgl. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 709 (1931), dies. Zbl. **1**, 148], bestimmt der Verf. die eindeutigen und analytischen Abbildungen der beschränkten Hartogsschen Körper (semi-cerclés) in sich und untereinander. Er gelangt dabei zu folgenden Ergebnissen: Ist ein Hartogsscher Körper weder einem Reinhardtschen Körper noch einem allgemeinen Dizylinder äquivalent, so läßt er nur Transformationen der Form

$$w' = f(w), \quad z' = z g(w) \quad (1)$$

in sich zu, d. h. also, die Symmetrieebene  $z = 0$  geht stets in sich über. (Zwei Hartogssche Körper heißen äquivalent, wenn sie durch eine Transformation (1) aufeinander abgebildet werden können.) Die Transformationen  $w' = f(w)$  bilden eine Gruppe  $G$ , die der Verf. näher untersucht.  $G$  ist entweder eigentlich diskontinuierlich oder von einem einzigen kontinuierlichen Parameter abhängig. Im letzteren Falle läßt sich der Körper auf einen ihm äquivalenten abbilden, der nur die Transformationen  $w' = f(w)$ ,  $z' = z e^{i\vartheta}$  ( $\vartheta$  reell) in sich zuläßt. Zwei Hartogssche Körper können nur dann aufeinander abgebildet werden, wenn sie einander äquivalent sind.

Thullen (Münster i. W.).

**Cartan, Henri:** Sur une classe remarquable de domaines. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1077—1079 (1931).

Jedem Hartogsschen Körper (semi-cerclé) — ein solcher ist durch die Transformationen  $w' = w$ ,  $z' = z e^{i\vartheta}$  ( $\vartheta$  reell) definiert — kann man eine „Projektion  $d$ “ der  $w$ -Ebene zuordnen, indem man jedem Punkt aus  $D$  seine  $w$ -Koordinate als Projektionspunkt in der  $w$ -Ebene entsprechen läßt. Existiert wenigstens eine in  $D$  eindeutige und analytische Funktion von  $w$  allein, die in 2 Punkten aus  $D$  mit derselben  $w$ -Koordinate:  $P_1 = (w_0, z_1)$  und  $P_2 = (w_0, z_2)$  verschiedene Werte annimmt, so betrachtet man die Projektionen von  $P_1$  und  $P_2$  als überlagerte Punkte; in diesem Falle ist also  $d$  nicht schlicht. Der Verf. untersucht nun die Klasse ( $I'$ ) aller schlichten Hartogsschen Bereiche, deren Projektionen nicht schlicht sind. Für diese Klasse kann er folgende Eigenschaften nachweisen: 1. Zu jedem Bereiche  $D$  aus ( $I'$ ) gibt es wenigstens eine in  $D$  analytische Funktion  $f(w, z)$ , die sich nicht in eine dort gleichmäßig konvergente Reihe von Polynomen entwickeln läßt. 2. Der kleinste  $D$  umfassende Existenzbereich ist nicht schlicht. Eigenschaft 1 zeigt insbesondere, daß der Runge'sche Satz sich nicht allgemein auf Bereiche des  $R_4$  übertragen läßt. Thullen (Münster i. W.).

### Spezielle Funktionen:

● **Artin, E.:** Einführung in die Theorie der Gammafunktion. (Hamburg. math. Einzelschr. H. 11.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 1931. 35 S. RM. 2.—.

Die wichtigsten Tatsachen aus der Theorie der Gammafunktion werden in einfacher Weise mit Hilfe eines Satzes von Bohr und Møllerup entwickelt: Erfüllt

eine Funktion  $f(x)$  die folgenden drei Bedingungen, so ist sie in ihrem Definitionsbereich mit der Gammafunktion identisch: a)  $f(x+1) = x f(x)$ . b) Zum Definitionsbereich von  $f(x)$  gehören alle  $x > 0$ , und  $f(x)$  ist für alle  $x > 0$  logarithmisch konvex (d. h.  $d^2/dx^2 \log f(x) \geq 0$ ). c)  $f(1) = 1$ . Beim Beweise dieses Satzes ergeben sich als Nebenresultat für jede Funktion mit den obigen Eigenschaften bereits die Gaußschen und Weierstraßschen Produktdarstellungen und damit deren Identität mit dem Eulerschen Integral  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  für  $x > 0$ . Ebenso folgen andere Darstellungen der

Gammafunktion — z. B. der Zusammenhang mit der  $B$ -Funktion und der Gaußsche Multiplikationssatz — unter Verwendung des obigen Satzes. Auch die Stirlingschen Formeln für das asymptotische Verhalten von  $\Gamma(x)$  werden so gewonnen. Um den Eulerschen Ergänzungssatz zu erhalten, wird gezeigt, daß das Produkt  $\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$  eine Konstante ist. Dies geschieht ohne Benutzung der Produktdarstellungen für die Faktoren, so daß die Produktentwicklung des Sinus sich als Nebenresultat einstellt. Schließlich wird auf die Möglichkeit eingegangen, die Gammafunktion als Lösung von  $f(x+1) = x f(x)$  durch das Bestehen noch einer anderen Funktionalgleichung — etwa durch den Gaußschen Produktsatz oder den Ergänzungssatz — zu charakterisieren. Jedoch liegen hier die Verhältnisse wesentlich komplizierter als bei der Kennzeichnung durch die logarithmische Konvexität; sie würden nicht einen so einfachen Zugang zu der Theorie der Gammafunktion ermöglichen.

Lüneburg (Göttingen).

Rasch, G.: Notes on the Gamma-function. Ann. of Math., II. s. 32, 591–599 (1931).

Kurze, recht elegante Herleitung verschiedener, teilweise bekannter, teilweise auch neuer Tatsachen und Formeln aus der Theorie der Gammafunktion: Einführung der Gammafunktion, trigonometrische Reihen für  $\log \Gamma(x)$ ,  $\Psi(x)$  und  $\Psi(x)\sin\pi x$ , Darstellung des Restgliedes der Stirlingschen Formel durch bestimmte Integrale und verschiedene Reihentypen usw.

Hille (Princeton, N. J.).

Rutgers, J. G.: Sur quelques intégrales définies se rattachant aux fonctions de Bessel. I. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 148–159 (1931).

Rutgers, J. G.: Sur quelques intégrales définies se rattachant aux fonctions de Bessel. II. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 239–256 (1931).

In einer früheren Arbeit [Nieuw Archief voor Wiskunde (2) VII, 385–405 (1907)] hatte der Verf. durch Anwendung eines Verfahrens der Reihennummern die folgende Formel erhalten:

$$\int_0^x J_\nu(x-\beta) J_\varrho(\beta) (x-\beta)^\nu \beta^\varrho d\beta = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\varrho+1)} \cdot \frac{x^{\nu+\varrho+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot J_{\nu+\varrho+\frac{1}{2}}(x).$$

Hierbei war  $J_\nu(x)$  die Besselsche Funktion vom Index  $\nu$ , und es wurde vorausgesetzt, daß der Realteil von  $\nu$  und  $\varrho$  größer sei als  $-\frac{1}{2}$ . Im 1. Teil dieser Arbeit beweist der Verf. diese Formel erneut durch vollständige Induktion; er erhält weitere Ergebnisse ähnlicher Art durch leichte Abänderung des Integranden und durch Annahme spezieller Werte für  $\varrho$ . Im 2. Teil dehnt er die Untersuchung auf den Fall ganzzahligen, negativen Index  $\nu$  aus.

H. Jordan (Rom).

## Geometrie.

Thébault, V.: Einige Eigenschaften des Dreieckes. Gaz. mat. 36, 321–323 (1931) [Rumänisch].

Diamond, A. H.: Quadrilaterals inscribed and circumscribed to a plane cubic. Bull. amer. math. Soc. 37, 258–260 (1931).

In a paper by M. W. Haskell the geometrical configurations of triangles inscribing and circumscribing a plane cubic curve have been studied by analytic methods.

Autoreferat.

Coxeter, H. S. M.: The densities of the regular polytopes. Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 201—211 (1931).

Es wird gezeigt, wie alle regulären Polytope als rationale Lösungen von trigonometrischen Gleichungen erhalten werden können. Im  $m$ -dimensionalen Raum sei das Polytop durch das Schläflische Symbol

$$\{k_1, k_2, \dots, k_{m-2}, k_{m-1}\}$$

gegeben, seine Begrenzungs- und Eckfiguren (Schnittfiguren mit einer Hyperebene nahe einer Ecke) sind

$$\{k_1, k_2, \dots, k_{m-2}\} \quad \text{bzw.} \quad \{k_2, \dots, k_{m-2}, k_{m-1}\}.$$

Es sollen die möglichen Werte für  $\{k_1, \dots, k_{m-1}\}$  bestimmt werden. Diese sind rationale Lösungen von gewissen trigonometrischen Gleichungen, man findet dabei in mehr als 5 Dimensionen die bekannten 4 Fälle: das reguläre Simplex, das Maßpolytop und sein reziprokes und ein ausgeartetes Polytop. Diese sind samt den Lösungen für den 3-, 4- und 5-dimensionalen Raum nebst Angabe ihrer Art (density) in einer Tabelle aufgeführt. Verf. gibt noch eine 2. Methode zu ihrer Bestimmung, da die obige versagt, um die ausgearteten Polytope von unendlicher Art auszuschließen. Sie beruht auf der Zentralprojektion des regulären Polytopes auf die ihm umschriebene Hyperkugel.

J. J. Burckhardt (Basel).

● Steiner, Jakob: Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, worunter eine große Anzahl neuer Untersuchungen und Sätze vorkommen, in einem systematischen Entwicklungsgange dargestellt. Aus Steiners Nachlaß hrsg. v. Rud. Fueter. Unter Mitwirkung v. F. Gonseth. (Veröff. d. schweiz. math. Ges. Bd. 5.) Zürich u. Leipzig: Orell Füssli 1931. XVIII, 345 S. RM. 10.80.

Das Manuskript dieses Werkes hat Steiner 1826 abgeschlossen. Er hatte wahrscheinlich die Absicht, es in die geplante geometrische Enzyklopädie „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ aufzunehmen, die dann unvollendet blieb. So wird das Werk jetzt erstmalig veröffentlicht. Als Ziel der Theorie kann man vielleicht das „verallgemeinerte apollonische Problem“ ansehen: Die Kreise (Kugeln) zu bestimmen, die drei (vier) gegebene Kreise (Kugeln) unter beliebig vorgegebenen verschiedenen oder gleichen Winkeln schneiden. Innere und äußere Berührung ergeben sich für die Winkelwerte 0 und  $\pi$ . — Daneben tritt die Aufgabe, die Kreise (Kugeln) zu bestimmen, die vier (fünf) Kreise (Kugeln) unter demselben (i. Allg. nicht mehr vorgebbaren) Winkel schneiden. Auf zwei Begriffen ruht der Gang der Untersuchung: den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise und der Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises. Hieraus erwächst eine synthetische Theorie der orthogonalen Kreisscharen, die in ihren Feinheiten schwerlich als Ganzes bekannt sein dürfte. Im Sinn des oben angegebenen Zieles werden nun die Kreise untersucht, die zwei gegebene Kreise  $M$  und  $m$  unter zwei gegebenen Winkeln  $B$  und  $b$  schneiden. Die Schar  $S_2$  der gesuchten Kreise steht in einfacher Beziehung zur linearen Schar  $S_1$  der Kreise, die  $M$  und  $m$  bestimmen. Jeder Kreis  $n$  aus  $S_1$  wird nämlich von allen Kreisen von  $S_2$  unter einem und demselben Winkel  $b_n$  geschnitten. Für  $b_n = \pi/2$  ergibt sich ein bestimmter Kreis  $n_0$  aus  $S_1$ , sein Mittelpunkt sei  $A$ . Zu jedem anderen Wert von  $b_n$  gehören dagegen zwei Kreise  $n$  und  $n'$  aus  $S_1$ . Alle diese Kreispaaire haben  $A$  zum Ähnlichkeitspunkt. Insbesondere gibt es ein Kreispaar  $n_1$  und  $n_2$  aus  $S_1$ , das von allen Kreisen aus  $S_2$  berührt wird,  $S_2$  ist also die Schar von Kreisen, die zwei feste Kreise berühren. Man erkennt, wie das verallgemeinerte apollonische Problem sich dadurch auf das gewöhnliche reduziert. Probleme über mehr als zwei gegebene Kreise werden naturgemäß auf die genannten Sätze zurückgeführt, indem man je zwei der gegebenen Kreise zusammenfaßt. Indem man zwei Kreise um ihre Mittellinie rotieren läßt, erhält man eine Grundlage für die analoge Theorie zweier Kugeln, die dann natürlich mit spezifisch räumlichen Methoden weiter ausgebaut wird. So findet sich die bekannte „Reyesche Konfiguration“ der Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln allgemeiner

Lage, und es ergeben sich die Dupinschen Zykliden als Hüllflächen der Kugeln, die drei gegebene Kugeln berühren oder sie allgemeiner unter drei festen Winkeln schneiden. Da die Mittelpunkte dieser Kugeln zwei Fokalkegelschnitte durchlaufen, schließt sich eine kurze Betrachtung dieser Kurvenpaare an. Ebenso werden noch viele andere Seitenwege ein Stück weit verfolgt, die sich im Rahmen eines kurzen Referats nicht aufzählen lassen.

Selbstverständlich ist es von biographischer Bedeutung, daß ein Werk S.s heute erstmalig veröffentlicht wird. Aber der Wert des Buches wäre nicht entscheidend verringert, hätte es ein Unbekannter in diesem Jahr verfaßt. Gewiß läßt sich nach den Lie-Kleinschen Übertragungsprinzipien die Kreis- und Kugelgeometrie als Spezialfall einordnen in die Polarentheorie der Hyperflächen zweiter Ordnung des projektiven  $n$ -dimensionalen Raums. Es besteht aber die Gefahr, daß die einzelne Materie sich in diesem Riesengebiet bis zur Unkenntlichkeit verflüchtigt. Das vorliegende Buch gibt einen vollkommen klaren synthetischen Aufbau der Kreis- und Kugelgeometrie unmittelbar aus den Begriffen der Strecke und des Winkels. Veraltet dabei ist alles, was sich auf die allgemeinen Gebilde zweiter Ordnung bezieht, deren Polarentheorie ja in S.s Jugend noch in den Anfängen war. Etwas langatmig, aber bei synthetischem Aufbau wohl unumgänglich, sind die immer wieder auftretenden Unterscheidungen außereinander, ineinander liegender oder sich schneidender oder berührender Kreis- und Kugelpaare. Am wertvollsten dürfte das Buch als Grundlage von Seminaren sein, ob man nun auf seinen Inhalt oder auf dessen historische Bedingtheit das Schwergewicht legt. Neue Ergebnisse lassen sich vielleicht aus den Sätzen gewinnen, die die Konfigurationen aus den Ähnlichkeits- und Potenzgebilden mehrerer Kreise und Kugeln betreffen. In solchen Betrachtungen ist ja die synthetische Methode der analytischen überlegen.

Die Wiedergabe des Manuskriptes ist wortgetreu, Herausgeberzusätze sind als solche kenntlich gemacht. Im Vorwort der Herausgeber wird für einige wichtige kreisgeometrische Resultate des Buchs angegeben, welche Sätze der hyperbolischen Raumgeometrie ihnen nach dem bekannten Übertragungsprinzip entsprechen (stereographische Projektion der Ebene auf eine Kugel  $K$  und Ersetzung jedes Kreises auf  $K$  durch den Pol seiner Ebene bezüglich  $K$ ). *Stefan Cohn-Vossen* (Köln-Delbrück).

**Strubecker, Karl: Über nichteuklidische Schraubungen.** *Mh. f. Math.* 38, 63—84 (1931).

Gehen wir von einem räumlichen Vierseit  $V$  aus, das zusammen mit seinen Diagonalen  $g_1, g_2$  ein Tetraeder  $T$  bestimmt. Unter den Kollineationen, die  $T$  festlassen, gibt es eine zweigliedrige kontinuierliche Untergruppe  $U$ , deren Elemente jede Fläche 2. Ordnung  $\Phi$  festlassen, die  $V$  enthält. Bestimmt man durch eine dieser Flächen eine Cayleysche Geometrie  $C$ , so möge als  $C$ -Schraubung (mit  $g_1, g_2$  als Achsen) jede eingliedrige Untergruppe  $K$  von  $U$  bezeichnet werden. (Man erhält eine euklidische Schraubung, wenn man  $V$  in passender Weise entarten läßt.) Verf. studiert die  $C$ -Schraubungen vor allem mittels synthetischer Liniengeometrie.  $U$  läßt nämlich außer dem Flächenbüschel ( $\Phi$ ) das Büschel ( $G$ ) aller Strahlengewinde elementweise fest, für die  $g_1, g_2$  ein Paar polarer Geraden sind (entsprechend der euklidischen Schraubungsinvarianz der Strahlengewinde). — Es werden die Bahnkurven ( $B$ ) der Gruppen  $K$ , sowie die „ $C$ -Regelschraubenflächen“ ( $R$ ) untersucht, d. h. die Flächen, die von Geraden allgemeiner oder spezieller Lage bei einer  $C$ -Schraubung überstrichen werden. Jede Bahnkurve  $B$  liegt natürlich auf einer der Flächen  $\Phi$ , und die Tangenten von  $B$  gehören einem der Gewinde  $G$  an, d. h.  $B$  ist „Gwindekurve“ von  $G$  auf  $\Phi$ . Die übrigen Bahnkurven auf  $\Phi$  sind ebenfalls Gwindekurven von  $G$  und umgekehrt. Durchläuft  $\Phi$  das Büschel ( $\Phi$ ), so durchläuft  $G$  das Büschel ( $G$ ). Macht man  $T$  zum Koordinatentetraeder, so hat die Bahnkurve des Punktes  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  die Gestalt

$$x = x_0 s^a, \quad y = y_0 s^b, \quad z = z_0 s^c, \quad t = t_0 s^d.$$

Damit ist jede eingliedrig-kontinuierliche Gruppe (Parameter  $s$ ) gekennzeichnet, die  $T$  festläßt. Damit die Gruppe in  $U$  liegt, müssen wir (bei entsprechender Lage von  $V$ ) annehmen:  $c + d = a + b$ . Man kann nun leicht die Gruppen  $K$  in  $U$  aufstellen, deren Bahnkurven algebraisch sind. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß  $c - a$  und  $c - b$  rational sind. Die Bahnkurve läßt sich dann inhomogen so schreiben:  $x = x_0 \sigma^{n-k}$ ,  $y = y_0 \sigma^k$ ,  $z = z_0 \sigma^n$ . ( $n, k$  ganzzahlig, relativ prim und  $n > 2k$ ). Dies sind also stets rationale Kurven. Algebraisch, und zwar von gerader Ordnung, sind alle Bahnkurven, die einen Strahl (und dann notwendig alle Strahlen) der linearen Kongruenz  $(g_1, g_2)$  zweimal treffen. Unter den  $C$ -Regelschraubenflächen  $(R)$  spielen eine Sonderrolle die  $C$ -, Wendel“-Flächen  $(W)$ , die von einem Strahl der Kongruenz  $(g_1, g_2)$  erzeugt werden: Die Durchdringungskurven der Flächen  $(R)$  werden vom Verf. mittels der Flächen  $(W)$  bestimmt. Sind bei einer  $C$ -Schraubung die Bahnkurven algebraisch, so auch die Flächen  $(R)$ . Eine große Zahl bekannter algebraischer Regelflächen läßt sich als  $R$ -Flächen auffassen. Jede allgemeine Regelfläche 3. Grades läßt sich sogar als  $W$ -Fläche auffassen.

Stefan Cohn-Vossen (Köln-Delbrück).

Musselman, John Rogers: The planar imprimitive group of order 216. Amer. J. Math. 53, 333—342 (1931).

Unter den endlichen Kollineationsgruppen der Ebene befinden sich ternäre Gruppen der Ordnung 216. Der Verf. untersucht eine ebene Konfiguration  $(18_6, 36_3)$ , die zu einer solchen  $G_{216}$  gehört, welche ein Dreiseit der Konfiguration festläßt. Diese Konfiguration wird durch die Wendepunkte und Wendepunktlinien von 4 Kurven 3. Ordnung gebildet, die in der folgenden Weise miteinander zusammenhängen, wenn eine derselben in die Hessesche Normalform gebracht wird:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3 &= 0 \\ -x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 6mx_1x_2x_3 &= 0 \\ x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 - 6mx_1x_2x_3 &= 0 \\ x_1^3 + x_2^3 - x_3^3 - 6mx_1x_2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Je 2 dieser Kurven haben genau 3 Wendepunkte gemeinsam. Alle 4 Kurven besitzen ein gemeinsames Wendedreiseit, nämlich das Koordinatendreiseit. Die Konfiguration dieser 18 Wendepunkte und 36 Inflexionsachsen setzt sich also aus 4 Hesseschen Konfigurationen zusammen. (Bekanntlich besteht die Hessesche Konfiguration aus 12 Geraden, von denen jede 3 Wendepunkte einer  $C_3$  enthält und je 4 durch jeden Wendepunkt hindurchgehen.) Die  $G_{216}$ , zu der die Konfiguration gehört, enthält eine  $G_{54}$ , die das den 4 Hesseschen Konfigurationen gemeinsame Dreiseit festläßt. Dagegen vertauscht die  $G_4$ :  $x'_1 = x_1$ ,  $x'_2 = \pm x_2$ ,  $x'_3 = \pm x_3$  die einzelnen Hesseschen Konfigurationen untereinander. — Der Verf. betrachtet außerdem eine duale Konfiguration von 36 Punkten und 18 Geraden und die verschiedenen Paare von 4fach und 6fach perspektiven Dreiecken, die sie enthält.

Taussky (Wien).

Weiss, E. A.: Möbiussche Tetraeder und Segresche  $V_3^3$ . Mh. f. Math. 38, 57—62 (1931).

Für zwei Möbiussche Tetraeder  $p_0p_1p_2p_3$  und  $r_0r_1r_2r_3$  im  $R_3$  genügt zur Annahme, daß die Gegeneckenpaare  $p_1r_1, p_2r_2, p_3r_3$  einer linearen Bedingung folgen, oder auch, daß sie Paare einer Involution auf der durch sie bestimmten Raumkurve 3. Ordnung sind. Nimmt man nun drei beliebige Punktepaare im  $R_4$  an, so kann man nach allen Punkten  $x$  fragen, von denen aus sie als Gegeneckenpaare zweier Möbius-Tetraeder in einen beliebigen  $R_3$  projiziert werden. Als Ort für  $x$  ergibt sich die bekannte Segresche Hyperfläche 3. Ordnung mit 10 Doppelpunkten und 15 Ebenen. Sie enthält 60 Systeme von je  $\infty^2$  Normkurven des  $R_4$ .

Eckhart (Wien).

Roth, L.: Multiple tangents to surfaces in higher space. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 154—160 u. 161—162 (1931).

Es wird zunächst eine algebraische Fläche  $F$   $n$ ter Ordnung und  $m$ ter Klasse in einem Raume mit 4 Dimensionen betrachtet; die Fläche besitze  $d$  uneigentliche Doppel-

punkte erster Art,  $j$  Tangenten durch einen Punkt allgemeiner Lage; und es sei  $\alpha$  der Rang eines hyperebenen Schnittes. Es werden mit elementaren Anwendungen des Korrespondenzprinzips einige Formeln bewiesen zur Bestimmung: der Ordnung der  $V_3$ , die aus denjenigen Tangenten von  $F$  besteht, die  $F$  noch in einem weiteren Punkt schneiden; der Ordnung der Regelfläche der Schmiegtangenten von  $F$ ; der Ordnung der Regelfläche der Tangenten von  $F$ , die  $F$  noch zweimal schneiden; der Anzahl der Doppeltangenten von  $F$ ; und der Anzahl der Schmiegtangenten, die  $F$  noch einmal schneiden. Ähnliche Anzahlbestimmungen werden dann für Flächen in Räumen  $S_5$  und  $S_6$  ausgeführt. Die Arbeit beruht auf einer früheren Arbeit des Verf. [Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 390 (1929)].  
*E. G. Togliatti (Genova).*

**Emch, Arnold:** Über die Abbildung projektiver Räume. Commentarii math. helvet. 3, 1—11 (1931).

Es seien  $x_i$  und  $y_k$  homogene Punktkoordinaten in den Räumen  $S_r$  und  $S_{r+1}$ . Dann vermitteln die Gleichungen:

$$y_k = x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_{r+1}, \quad (k = 1, \dots, r+1)$$

$$y_{r+2} = x_1^r + x_2^r + \dots + x_{r+1}^r$$

eine birationale Abbildung des  $S_r$  auf eine Hyperfläche im  $S_{r+1}$ . Für  $r = 2$  ergibt sich die bekannte Abbildung der Steinerschen Fläche auf die Ebene, die hier um einige Sätze bereichert wird, welche sich auf die Abbildung der Tangentialebenenschnitte und den Restschnitt der Steinerschen Fläche mit einem Kegel beziehen, die ihr längs eines Kegelschnittes oder einer allgemeineren Kurve umschrieben ist. Für  $r = 3$  wird im  $S_4$  eine  $M_3^9$  geliefert, die als verallgemeinerte Steinersche Fläche bezeichnet wird. Eine Hyperebene schneidet  $M_3^9$  in einer  $M_2^9$ , dem Bilde einer allgemeinen Fläche 3. Ordn.  $M_2^3$  im  $S_3$ , deren Gleichung in einer einfachen kanonischen Gestalt erscheint. Die besondere Lage der  $M_2^3$  zum Koordinatentetraeder kommt darin zum Ausdruck, daß sie die Kanten des Koordinatentetraeders in einer bemerkenswerten Konfiguration schneidet. Diese Konfiguration ist in einer Kollineationsgruppe  $G_{648}$  invariant, und ihre 18 Punkte liegen zu je 6 in 27 Ebenen.  
*E. A. Weiss (Bonn).*

**Bortolotti, Enea:** Connessioni proiettive. II. La teoria delle connessioni proiettive, secondo Cartan e Schouten. Boll. Un. mat. ital. 10, 28—34 (1931).

**Bortolotti, Enea:** Connessioni proiettive. III. Ulteriori sviluppi della teoria. Relazioni con la geometria proiettiva differenziale secondo Fubini. Boll. Un. mat. ital. 10, 83 bis 90 (1931).

Fortsetzung eines Referates über Räume von projektivem Zusammenhang. Teil I (mit Literaturverzeichnis) ist in 9, 288—294 derselben Zeitschrift erschienen.

*Stefan Cohn-Vossen (Köln-Delbrück).*

**Mira Fernandes, A. de:** Proprietà di alcune connessioni lineari. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 179—183 (1931).

The author studies properties of the following linear connections (notation of Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin: Springer 1924):

$$S_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = 0, \quad S'_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = 0, \quad C_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = C_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma}, \quad (1)$$

$$S'_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = 0, \quad C_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = C_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma}, \quad Q'_{\alpha\beta\gamma} = Q'_{\alpha} g_{\beta\gamma} \quad (2)$$

with the special case  $Q'_{\alpha} = 0$ ,

$$S'_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = S'_{[\beta} A_{\alpha]}^{\gamma}, \quad C_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = C_{\alpha} A_{\beta}^{\gamma}. \quad (3)$$

Attention is also devoted to the case that  $C_{\alpha}$  is a gradient vector.

*D. J. Struik.*

**Mellish, A. P.:** Notes on differential geometry. Ann. of Math., II. s. 32, 181—190 (1931).

Aus dem Nachlaß des 1930 25jährig Verstorbenen. Sätze über Kurven und Flächen konstanter Breite, die im wesentlichen bekannt sind, werden auf neue elegante Art abgeleitet; man geht von einem begleitenden Vektordreikant aus und vergleicht alle

Punktpaare mit entgegengesetzten Normalen. Die letzte Note bringt einen durch die vektorielle Methode vereinfachten Beweis eines Satzes über Bertrandkurven.

*Stefan Cohn-Vossen (Köln).*

**Kerner, Michael:** Geschlossene geodätische Linien auf einem Kreistorus. *Mh. f. Math.* 38, 53—56 (1931).

Wird der Kreistorus längs des Kehlkreises aufgeschnitten und homeomorph auf einen Kreisring abgebildet, so kann man mühelos die begrenzenden Kreise, die beide dem Kehlkreis entsprechen, stetig ineinander überführen, so daß die Länge der entsprechenden Kurve auf dem Torus kleiner bleibt als die des Äquatorkreises. Aus einem Satze von Birkhoff folgt daher, daß es auf dem Kreistorus eine geschlossene geodätische Linie gibt, die weder ein Meridian- noch der Äquatorkreis ist. Durch Rotation ergibt sich eine ganze Schar solcher Linien.

*Willy Feller (Kiel).*

**Cattaneo, Paolo:** Sui sistemi birombici. *Boll. Un. mat. ital.* 10, 63—67 (1931).

Auf einer (nicht abwickelbaren und nicht sphärischen) allgemeinen Fläche seien die Parameter so gewählt, daß nicht nur die Par.-Linien, sondern auch ihre sphärische Abbildung ein rhombisches Netz bilden (Birombische Parameter). Diese Parameter  $u, v$  sind mit den Parametern  $U, V$  der Hauptkrümmungslinien durch

$$U = a(u + v), \quad V = b(u - v) \quad (1)$$

verbunden, wenn  $a$  und  $b$  willkürliche Funktionen der Argumente  $u + v, u - v$  darstellen. Dieser Satz folgt aus der Transformationsweise der Koeffizienten der beiden Grundformen. Aus (1) folgt auch  $\operatorname{tg} \Theta = \pm \operatorname{tg} \Omega/2$ , wenn  $\Omega$  der Winkel der  $u$ - und  $v$ -Linien darstellt und  $\Theta$  der Winkel je einer der Parameterlinien mit  $V = \text{const}$  ist. Die Ausrechnung der beiden Krümmungen  $1/r_1 r_2$  und  $1/r_1 + 1/r_2$  ergibt

$$\frac{\cos \Omega - \cos \omega}{1 - \cos \omega \cos \Omega} = \pm \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad (2)$$

wo  $\omega$  der Winkel der sphärischen Abbildung der Parameterlinien ist. — Die Formel für die Windung der Geodätischen lehrt, daß der absolute Betrag der Windung für beide Geodätischen in der Richtung der Parameterlinien gleich ist. Es folgen außerdem 2 kurze Betrachtungen über die Form der Gauss'schen Gleichungen für diese besondere Parameter.

*Hlavatý (Prag).*

**Buhl, A.:** Propagations conoidales en géométrie ondulatoire. Ondes dérivées de l'ellipsoïde. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 323—325 (1931).

Gegeben sei ein Oberflächenintegral, erstreckt über ein bestimmtes Flächenstück. Man kann dasselbe auch als Integral, erstreckt über Teile von gewissen Hilfsflächen darstellen, so zwar, daß das Integral ein Stokessches wird, sich also in ein Linienintegral umformen läßt. Die Hilfsflächen — „Wellenflächen der gegebenen Fläche“ — werden durch eine partielle Differentialgleichung bestimmt. Für das Oberflächenintegral des Ellipsoides lassen sie sich explizite angeben.

*Willy Feller (Kiel).*

**Moore, C. L. E., and P. Franklin:** The geometry of algebraic Pfaffians. *J. of Math.* 10, 19—49 (1931).

Zugrundegelegt wird ein Pfaffsches Problem mit algebraischen Koeffizienten im zwei- und im dreidimensionalen Raum. Als dessen Geometrie wird die Verteilung der Linien- bzw. Flächenelemente bezeichnet, die jedem Raumpunkt zugeordnet sind. Die Möglichkeiten werden in dem Fall diskutiert, daß die Koeffizienten Polynome höchstens 2. Ordnung sind. Die affinen und die projektiven Normaltypen werden aufgestellt. Besonderes Augenmerk wird auf die geradlinigen Integralkurven gerichtet. Im dreidimensionalen Fall gibt es eine quadratische Kongruenz solcher Integralkurven, falls die Koeffizienten linear sind. Setzt man das dagegen nicht voraus und verlangt trotzdem, daß durch jeden Punkt allgemeiner Lage eine geradlinige Integralkurve gehen soll, so ergeben sich für die Koeffizienten unendlich viele notwendige Bedingungen. Die Arbeit soll als Grundlage späterer Verallgemeinerungen dienen.

*Stefan Cohn-Vossen (Köln).*

## Topologie:

**Whitney, Hassler:** The coloring of graphs. (*Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge [U. S. A.]*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 122—125 (1931).

Study of the number  $m_{ij}$  appearing in a formula (found by Birkhoff)

$$P(\lambda) = \sum_i \lambda^{v-i} \sum_j (-1)^{i+j} m_{ij} = \sum_i m_i \lambda^{v-i}$$

for the number  $P(\lambda)$  of coloring a graph  $G$  in  $\lambda$  colors, if  $G$  contains  $v$  vertices.  $m_{ij}$  is the number of subgraphs of rank  $i$  and nullity  $j$ . Theorem 1.  $(-1)^i m_i$  is the number of ways of picking out  $i$  arcs from  $G$  so that not all the arcs of any broken circuit are removed. Theorem 2.  $(-1)^i m_i > 0$ . Theorem 7. There exists no other polynomial relation between the  $m_{ij}$ , true for all graphs. However, there exist many inequalities, for instance, those induced by theorem 2. Theorem 8. Suppose  $G$  is a planar graph, and  $G'$  is its dual. Then  $m'_{ij} = m_{N-j, R-i}$ , if  $R$  is the rank and  $N$  the nullity of  $G$ .  
Kolmogoroff (Moskau).

**Whyburn, G. T.:** Concerning addition of regular curves. Mh. f. Math. **38**, 1—4 (1931).

Die Summe von zwei regulären Kurven (ohne Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung; vgl. z. B. Urysohn, Mult. Cantorienes II. Verh. Amsterd. Akad. **13**, 4, Kap. II, 46), insbesondere die Summe  $B_1 + B_2$  von zwei ebenen Raumkurven  $B_1$  und  $B_2$  von der Ordnung (Verzweigungsindex) 3, kann ein unstetiges Teilkontinuum enthalten, ist also nicht immer regulär. Außer einem konkreten Beispiel dieser Art ist folgender Satz bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine reguläre Kurve  $M$  addiert zu einer beliebigen regulären Kurve  $N$  eine reguläre Summe  $M + N$  bildet, ist: die abgeschlossene Hülle sämtlicher Verzweigungspunkte von  $M$  ist nulldimensional (=  $M$  enthält kein Kontinuum der Kondensation).

Julia Róžańska (Moskau).

**Whyburn, G. T.:** Concerning the subsets of regular curves. Mh. f. Math. **38**, 85 bis 88 (1931).

Unter den (nichtabgeschlossenen) Teilmengen einer regulären (endlichverzweigten) Kurve gibt es nur folgende Klassen von Mengen: 1. Mengen, die ein Teilkontinuum enthalten. 2. Punktförmige Mengen, die zusammenhängende Teilmengen enthalten. 3. Nulldimensionale Mengen. (Die abgeschlossenen Mengen können bekanntlich nur von der Art 1 und 3 sein.) Die Unmöglichkeit anderer Mengenarten wird durch den folgenden Satz bewiesen: Ist eine Untermenge  $M$  einer regulären Kurve  $R$  von der Dimension  $> 0$ , so enthält  $M$  eine zusammenhängende, mehr als aus einem Punkte bestehende Teilmenge.

Julia Róžańska (Moskau).

**Brouwer, L. E. J.:** Über freie Umschließungen im Raume. Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 100—101 (1931).

Verf. weist darauf hin, daß die von Rey Pastor bemerkte Unstimmigkeit bei der Konstruktion einer nicht-Jordanschen freien Umschließung [vgl. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 27—29 (1931) und dies. Zbl. **1**, 174] durch dessen andersartige Konstruktion nicht behoben ist. Er stellt sein eignes Versehen richtig und zeigt gleichzeitig, durch welche Modifikation der Schlüsse von Rey Pastor eine wirkliche nicht-Jordansche freie Umschließung gewonnen werden kann.

Grell (Jena).

**Wilder, R. L.:** Extension of a theorem of Mazurkiewicz. Bull. amer. math. Soc. **37**, 287—293 (1931).

In Verschärfung eines Satzes von S. Mazurkiewicz [Fund. Math. **13**, 146—150 (1929)] wird gezeigt: Ist  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge des  $E_n$  (=  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum), die ein eindeutiges und umkehrbar stetiges Bild einer Teilmenge des  $E_{n-1}$  ist, so ist jeder Punkt  $P$  von  $A$  vom Komplement  $E_n - A$  aus regulär erreichbar, d. h. zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß es für jeden Punkt  $Q$  aus  $E_n - A$ , der von  $P$  einen Abstand  $< \delta$  hat, eine ganz in  $E_n - A$  verlaufende,  $Q$  ent-

haltende,  $P$  zum Häufungspunkt habende, zusammenhängende Menge gibt, deren Punkte von  $P$  sämtlich einen Abstand  $< \varepsilon$  haben. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

**Wilson, W. A.:** A property of continua similar to local connectivity. *Bull. amer. math. Soc.* **37**, 294—300 (1931).

Es werden metrische, separable Räume  $Z$  untersucht, in denen der Satz von Bolzano-Weierstrass gilt. Eine Teilmenge  $M$  von  $Z$  heißt regulär, wenn es in jeder Umgebung eines jeden Punktes  $p$  von  $M$  eine zusammenhängende,  $p$  enthaltende, offene Menge gibt. Ist  $M$  ein in  $Z$  abgeschlossenes Kontinuum, so heißt  $M$  biregulär, falls es zu jedem Teilkontinuum  $C$  des Komplements  $Z - M$  eine Zerlegung von  $Z$  in Kontinua  $H$  und  $K$  derart gibt, daß  $M$  und  $H$  einerseits,  $C$  und  $K$  andererseits keinen Punkt gemein haben. Ist  $Z$  zusammenhängend und  $M$  ein bireguläres Kontinuum, so ist  $M$  auch regulär. Dies ist im allgemeinen nicht umkehrbar. Es wird deshalb weiter untersucht, unter welchen Zusatzannahmen aus Regularität auf Biregularität geschlossen werden kann. Schließlich werden Kriterien für Biregularität und verwandte Begriffe aufgestellt. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

**Johansson, Ingebrigt:** Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsflächen. *Skr. norske Vidensk.-Akad., Oslo, Math.-naturv. Kl. Nr 1*, 1—69 (1931).

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, für beliebige Flächen den Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe (F.Gr.) und ihren Untergruppen einerseits und den unverzweigten Überlagerungsflächen (Üb.Fl.) andererseits auseinanderzusetzen. Dabei werden von vornherein „unendliche“ Flächen, d. h. solche, bei deren kombinatorischem Aufbau unendlich viele Elementarflächenstücke als Bausteine erforderlich sind, in die Untersuchung einbezogen. Die Flächen werden zur Hauptsache kombinatorisch definiert (§ 1), wenn auch Stetigkeitsbetrachtungen nicht ganz vermieden werden und die einwandfreie Zusammenfügung dieser beiden Bestandteile nicht ganz durchgeführt ist. (Bei dieser Gelegenheit seien Leser der Abhandlung darauf aufmerksam gemacht, daß der Verf. die Ausdrücke „abgeschlossen“ bzw. „offen“ im Sinne des üblichen „kompakt“ bzw. „nichtkompakt“ benutzt.) Im § 2 wird die F.Gr. eingeführt und näher erläutert. Als ihre Elemente werden „Weggewebe“, d. h. vollständige Systeme ineinander deformierbarer Wege mit festem Anfangs- und Endpunkt, dem „Mittelpunkt“ der Fläche, benutzt. In § 3 werden Darstellungen der F.Gr. durch Erzeugende und definierende Relationen abgeleitet durch Verwendung eines „Nahtsystems“, d. h. eines beliebigen Systems von Schnittkurven, welche die Fläche in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück umwandelt. Überschreitungen der einzelnen Nahtkurven ergeben dabei die Erzeugenden, Umkreisungen der Eckpunkte des Nahtsystems die definierenden Relationen. Der § 4 leitet des vollständigen Zusammenhangs halber bekannte Darstellungen der F.Gr. geschlossener und berandeter, zweiseitiger und einseitiger Flächen endlichen Geschlechts aus geeigneten Nahtsystemen ab. Der § 5 bringt nun als erstes Hauptergebnis den Satz, daß die F.Gr. unendlicher Flächen (s. o.) immer eine freie Gruppe ist. Der Beweis wird erreicht durch Konstruktion eines Nahtsystems, das im Inneren der Fläche keinen Eckpunkt aufweist. Diese Konstruktion erscheint dem Referenten als der methodisch interessanteste Teil der Abhandlung. Im § 6 werden nun unverzweigte Üb.Fl. zu einer gegebenen Fläche kombinatorisch konstruiert, indem die Fläche mit endlich oder unendlich vielen Blättern überdeckt wird, die längs gewisser Kurven — vom Verf. mit einem nicht sehr glücklichen Ausdruck „Verzweigungskurven“ genannt — ineinander übergehen. Es wird ein System von notwendigen (aber übrigens nicht ganz hinreichenden) Bedingungen dafür angegeben, daß hierdurch eine Fläche im vorher definierten Sinn entsteht, und es wird gezeigt, daß eine beliebige Üb.Fl. einer Darstellung fähig ist, bei der die Verzweigungskurven von einem beliebig vorgegebenen Nahtsystem der Grundfläche gebildet werden. Im § 7 wird gezeigt, daß die Arteinteilung der Punkte einer Fläche in innere Punkte, gewöhnliche Randpunkte, Randendpunkte und isolierte Randpunkte sich unverändert auf unverzweigte Üb.Fl. überträgt, ebenso die Eigenschaft der Grundfläche, berandet

oder nicht berandet, unendlich und zweiseitig zu sein. Ferner werden die zweiseitigen Üb.Fl. der einseitigen Flächen näher studiert. Endlich wird gezeigt, daß eine  $n$ -blättrige Üb.Fl. eines  $p$ -fachen Ringes ein  $[n(p-1)+1]$ -facher Ring ist (ein Spezialfall der Formel von Hurwitz). In den §§ 8—10 wird nun der Zusammenhang zwischen den Untergruppen der F.Gr. der Grundfläche und den F.Gr. der Üb.Fl. eingehend untersucht. Die Grundfläche  $F$  trage einen Mittelpunkt  $O$ , der bei der Konstruktion ihrer F.Gr.  $G$  Verwendung findet. Auf der unverzweigten Üb.Fl.  $\Phi$  wird ein Punkt  $O_1$  über  $O$  als Mittelpunkt für die Konstruktion ihrer F.Gr.  $\Gamma$  ausgezeichnet. Dann entsprechen sich die Elemente von  $\Gamma$  und die Elemente einer gewissen Untergruppe  $U$  von  $G$  durch Übereinanderliegen eineindeutig. Die Art dieser Korrespondenz wird eingehend erörtert. Umgekehrt läßt sich nun jeder Untergruppe  $U$  von  $G$  auf diese Weise eine mit Mittelpunkt versehene Üb.Fl.  $\Phi$  zuordnen. Man hat hierzu  $G$  nach  $U$  zu zerlegen:  $G = U + U \cdot g' + U \cdot g'' + \dots$  und jeder dieser „Schichten“ (Nebengruppen) ein Blatt von  $\Phi$  entsprechen zu lassen. Wird nun auf  $F$  ein bestimmtes Nahtsystem zugrunde gelegt, so soll der Überschreitung einer Nahtkurve diejenige Blätterpermutation zugeordnet werden, die der Schichtpermutation bei Postmultiplikation mit dem zugehörigen Element von  $G$  entspricht. — Dem Übergang zu einem anderen Punkt  $O_2$  über  $O$  als Mittelpunkt von  $\Phi$  entspricht die Korrespondenz mit einer zu  $U$  konjugierten Untergruppe von  $G$ . Wenn also insbesondere  $U$  invariant in  $G$  ist, so ist  $U$  durch  $\Phi$  allein, ohne Angabe eines Mittelpunktes, bestimmt. (In diesem Fall ist  $\Phi$  eine reguläre Üb.Fl., gestattet also eine Gruppe von Decktransformationen. Der Ref. möchte bemerken, daß man von hier aus die obige Konstruktion auch so leisten kann, daß man zunächst die der nur aus der Identität bestehenden invarianten Untergruppe entsprechende „universelle“ Üb.Fl. konstruiert und dann immer solche Punkte dieser Fläche wieder vereinigt, die bei der  $U$  entsprechenden Untergruppe der Gruppe der Decktransformationen ineinander übergehen.) Im § 9 ergibt sich hieraus nun zunächst der schon in der Literatur bekannte Satz, daß die Untergruppen einer freien Gruppe wieder frei sind; denn unendliche Flächen haben nur unendliche Üb.Fl. Weiter aber leitet der Verf. nun eine vollständige Tafel der Untergruppen von endlichem Index der F.Gr. der Flächen endlichen Geschlechtes ab. — Endlich geht noch der § 10 auf die Gruppe der sog. „natürlichen Blätterpermutationen“ ein, und der abschließende § 11 bringt Verallgemeinerungen auf beliebige Kontinua, die wiederum zu allgemeinen gruppentheoretischen Sätzen führen.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

## Klassische Theorie der Elektrizität.

Kennelly, Arthur E.: The convention of equidimensional electric and magnetic units. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 147—153 (1931).

It is the object of this paper to present a set of electromagnetic unit dimensions, common to both electric and magnetic systems, based on the conventional hypothesis that the dimensions of permittivity  $k_0$  and permeability  $\mu_0$  for free space are the same.

Autoreferat.

Greinacher, H.: Über eine einfache Herleitung des Biot-Savartschen Gesetzes aus dem Induktionsgesetz. (*Phys. Inst., Univ. Bern.*) Helvet. phys. Acta 4, 59—67 (1931).

Zur Verwendung in Elementarvorlesungen über Experimentalphysik wird eine Ableitung des Biot-Savartschen Gesetzes angegeben, die ohne höhere Mathematik auskommt. Es wird der Fall des unendlich langen Leiters, des endlichen Leiters und eines Elementarstromkreises behandelt.

K. Bechert (München).

Pol, Balth. van der: Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. (*Natuurkund. Labor., N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven-Holland.*) Z. Hochfrequenz-techn. 37, 152—156 (1931).

Nach einer Besprechung der Zenneckschen Formeln für die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen an der ebenen Grenze zweier Medien wird die Sommer-

feldsche Integralformel für das Oberflächenfeld eines auf dieser Grenze stehenden vertikalen elektrischen Dipols umgeformt und an Hand von numerischen Rechenergebnissen B. Rolfs durch einen empirischen Ausdruck angenähert, für den Fall, daß die Dielektrizitätskonstante der Erde vernachlässigt werden kann. Auch von einem auf der Grenzschicht stehenden vertikalen magnetischen Dipol wird die entlang dieser Grenze fortschreitende Strahlung in Anlehnung an Sommerfeld behandelt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Strutt, M. J. O.: Skineffekt.** (*Natuurkundig Laborat. d. N. V. Philips's Gloeilampenfabrieken, Eindhoven.*) *Ann. Physik*, V. F. 8, 777—793 (1931).

Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes in räumlichen Leitern wird für den quasistationären Fall und konstante Permeabilität mit Hilfe des Vektorpotentials auf die Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung zurückgeführt. Da die letztere nur reelle Eigenwerte besitzt, läßt sich die formale Lösung angeben und aus der Beziehung für die Stromdichte auch die im Leiter dissipierte Energie berechnen. Der Autor verwendet die formale Lösung, um die Frequenzabhängigkeit der dissipierten Leistung in zwei Extremfällen (niedrige und hohe Frequenz) abzuleiten. Im ersten Falle ergibt sich angenähert quadratische Abhängigkeit. Im letzteren Falle wird das Feldproblem hydrodynamisch behandelt [vgl. M. J. O. Strutt, *Hydrodynamische Behandlung hochfrequenter elektrometrischer Aufgaben*. *Arch. Elektrotechn.* **21**, 525 (1929)] und nach Einführung eines natürlichen Koordinatensystems ergibt sich hier Proportionalität mit der Wurzel aus der Frequenz. Die Ableitungen gelten allgemein für jeden räumlichen Leiter, wenn dieser keine Spitzen und Kanten aufweist. Damit ist allgemein nachgewiesen, daß in praktischen Fällen auftretende Abweichungen von diesen Gesetzmäßigkeiten bestimmt nicht von einer neuen Art Skineffekt herrühren können, sondern andere Ursachen haben müssen. Für die Ausdrücke niedrige und hohe Frequenz werden mathematische Definitionen gegeben. *Ernst Weber* (New York).

**Whitehead, S.: Electromagnetic reactions between conducting and magnetic material, and an alternating current.** *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 897—914 (1931).

Diese Arbeit behandelt die folgenden (quasistationären) Probleme: a) Ein unendlich dünner, gerader Wechselstromleiter läuft parallel zu einem Hohlzylinder kreisförmigen Querschnitts aus leitendem, ferromagnetischem Material; berechnet werden die im Zylinder erzeugten Wirbelströme und die Kraft, welche ihnen zufolge auf den Wechselstromleiter ausgeübt wird; b) der aus a) entstehende Grenzfall mit  $\infty$ -großem Zylinder-radius. Die im letzten Fall erhaltenen (aus der Literatur bekannten) unendlichen Integrale werden nicht diskutiert. Dem Ref. sei gestattet, zu bemerken, daß auch die im Falle a) abgeleiteten Ausdrücke bereits in der Literatur vorkommen [*Ch. Mannebach*, *Journ. Math. u. Phys. Mass. Inst.* **1**, 124 (1922); *S. Butterworth*, *Proc. Roy. Soc. London A* **107**, 693 (1925)], was vom Verf. nicht erwähnt wird. *M. J. O. Strutt*.

**Dwight, H. B.: The magnetic field of a circular cylindrical coil.** (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 948—957 (1931).

In dieser Arbeit werden für das magnetische Feld eines von Gleichstrom durchflossenen Solenoids endlicher Wicklungsdicke Ausdrücke abgeleitet in Form von Reihen aus Legendreschen Kugelfunktionen. Diese Reihen konvergieren schnell für Aufpunkte, weit von der Spule entfernt und schlechter, je näher man der Spule selber kommt.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Fischer, Wilhelm: Die Frage der Frequenz bei der induktiven Erwärmung.** *Z. Hochfrequenztechn.* **37**, 127—133 (1931).

Bei der rechnerischen Untersuchung der induktiven Erwärmung hochfrequenter elektromagnetischer Felder auf gestreckte Leiter wird als rohes Modell ein unendlicher, langer, kreiszylindrischer Leiter ( $z$ -Achse, Radius  $a$ ) zugrunde gelegt, auf den ein rein axiales, bei Nichtvorhandensein des Drahtes homogenes magnetisches Wechselfeld  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$  (Kreisfrequenz  $\omega$ ) einwirkt; dann hat der induzierte Stromdichtenvektor nur eine zirkuläre Komponente  $j = j_\alpha$ , und beide Vektoren hängen allein vom Radius  $r$

ab. Man hat es also mit dem zum bekannten Skineffekt dualen Fall zu tun, und die Integration der Maxwellschen Gleichungen läßt sich in gleicher Weise wie dort durchführen, wobei nur  $j$  und  $\xi$  ihre Rollen vertauschen, und führt zu analogen Ergebnissen. Die Integrationskonstante ist jedoch hier in anderer Weise als dort (Gesamtstrom), nämlich aus der magnetischen Feldstärke an der Drahtoberfläche zu bestimmen, was sich physikalisch in einer verschiedenen Frequenzabhängigkeit von Feld- und Stromverdrängung sowie der Leistungsaufnahme im einen und anderen Fall äußert: Bedeuten  $\kappa$  und  $\mu$  Leitfähigkeit und Permeabilität des Materials,  $q = \sqrt{4\pi i \mu \kappa \omega} \cdot 10^{-9} \cdot r$ ,  $q_0 = q(a)$ , sowie  $\bar{j}$  und  $\bar{\xi}$  die resp. Integrationskonstanten: Stromdichte bei Gleichstrom bzw. Randfeldstärke, so wird im Falle der Stromverdrängung:

$$\frac{j}{\bar{j}} = \frac{q_0}{2} \cdot \frac{J_0(q)}{J_1(q_0)}; \quad \frac{\xi}{\bar{\xi}} = \frac{10}{2\pi a} \cdot \frac{J_1(q)}{J_1(q_0)},$$

im Falle der Feldverdrängung:

$$\frac{\bar{\xi}}{\xi} = \frac{J_0(q)}{J_0(q_0)}; \quad \frac{j}{\bar{j}} = \frac{10}{2\pi a} \cdot \frac{q_0}{2} \cdot \frac{J_1(q)}{J_0(q_0)},$$

worin  $J_0$  und  $J_1$  die Besselschen Funktionen nullter bzw. erster Ordnung sind. Bedeuten andererseits  $W$  und  $B$  die Wirk- und Blindleistung pro Längeneinheit, so wird bei Stromverdrängung

$$L = W + iB = -\frac{\bar{j}^2}{\kappa} \frac{q_0}{2} \frac{J_0(q_0)}{J_1(q_0)}, \quad (a)$$

bei Feldverdrängung aber

$$L = W + iB = \frac{10}{\kappa} \frac{\bar{\xi}^2}{2} \frac{q_0}{2} \frac{J_1(q_0)}{J_0(q_0)}. \quad (b)$$

In (b) steigt die Wärmeleistung  $W$  bei kleinem  $q_0$  mit  $q_0^4$ , also  $\omega^2$ , bei großem  $q_0$  mit  $q_0$ , d. h.  $\sqrt{\omega}$ ; das Maximum von  $W/q_0^2$  liegt bei etwa  $q_0 = 2.5$ . Aus diesem Verlauf werden Schlußfolgerungen für die Dimensionierung einerseits zur Ausnutzung der Erwärmung im Induktionsofen, andererseits zur Vermeidung derselben in Konstruktionsteilen gezogen.

Baerwald (Berlin).

**Sleator, W. W.:** The propagation of energy by waves and the amplitude of a light wave. J. opt. Soc. Amer. **21**, 187—204 (1931).

Der Verf. sucht einige Gesetze der Wellenausbreitung in einer neuen, elementaren Weise anschaulich zu machen, wobei er didaktische Zwecke im Auge hat. Sein Ziel ist das Aufstellen des Ausdrucks der Geschwindigkeit von Saiten-, Schall- und elektromagnetischen Wellen, wobei er von einer bestimmten Voraussetzung ausgeht: daß bei diesen Wellen überall die kinetische Energie der potentiellen Energie gleich sei und in der Phase mit ihr übereinstimme. Es gelingt dem Verf., für die schwingende Saite einen Ausdruck der potentiellen Energie zu finden, der dies plausibel macht. Einfache Überlegungen führen tatsächlich zum bekannten Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit. Diese Ableitung wird dann ohne weiteres in eine allgemeine Vektorform gebracht und dadurch formell auf die Maxwellschen Gleichungen angewendet. Ebenso werden die elastischen Wellen in einem beliebigen homogenen Medium behandelt, und es ergibt sich der Ausdruck der Schallgeschwindigkeit. Die Hauptuntersuchung bezieht sich auf die elektromagnetischen Wellen. Dem Verf. gelingt es, sie in das von ihm verwendete Schema einzuordnen durch Einführung einer neuen Vektor-Potentialfunktion  $u$ . Er setzt:  $\text{curl } u = D = e \cdot E$  = elektrische Induktion;  $\partial u / \partial t = H$  = magnetische Induktion; wobei  $u$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $H$  Vektoren sind und das Medium nicht magnetisierbar ist. Zuerst wird nachgewiesen, daß dieser Ansatz erlaubt ist, dann darauf hingewiesen, daß es sich um eine neue, nicht mit dem Hertzschen Vektor zu verwechselnde Größe handle. Der Ref. möchte allerdings darauf hinweisen, daß dieses  $u$  doch grundsätzlich nichts anderes ist als die rot. der bekannten Hertzschen Vektorfunktion  $\mathfrak{H}$ , so daß die ganze weitere Untersuchung eine interessante Darstellung dieses Vektors  $\text{rot } \mathfrak{H}$  liefert. Der Verf. zeigt, daß dieser „Lichtvektor“  $u$  zur Charakterisierung der elektrischen und der magneti-

schen Wellen dienen kann, daß man seine Amplitude kurzweg als die Amplitude der Lichtwelle bezeichnen kann, und daß es nun wieder durch Gleichsetzen der elektrischen und magnetischen Energie gelingt den Ausdruck  $c/\sqrt{\epsilon}$  für die Phasengeschwindigkeit der Wellen herzuleiten. In einfacher Weise läßt sich der Übergang aus einem Medium in ein anderes behandeln, wobei sofort die Fresnelschen Formeln erhältlich sind. Der Verf. gibt noch einige numerische Angaben und weist auf die weiteren optischen Probleme, die nach seinen Methoden behandelt werden könnten. *P. Gruner* (Bern).

**Murray, F. H.:** Conductors in an electromagnetic field ( $E^0 e^{pt} H^0 e^{pt}$ ). *Amer. J. Math.* **53**, 275—288 (1931).

Diese Arbeit behandelt in allgemeiner Form folgendes Problem. Vorgelegt sei irgendein einfach periodisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$  von der Zeit abhängendes elektromagnetisches Feld. In dieses Feld werden Leiter irgendwelcher Gestalt hineingebracht. Unter welchen Bedingungen existiert eine Lösung des entstandenen mathematischen Problems? Das Problem wird, im Anschluß an Weyl, auf ein System simultaner Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus zurückgeführt im Falle unendlich guter Leiter. Es existiert hier somit eine eindeutige Lösung des linearen nichthomogenen Problems, für alle  $\omega$ -Werte, die nicht mit einem Eigenwert des entsprechenden homogenen Problems (äußeres eingepprägtes Feld gleich Null) zusammenfallen. Es wird gezeigt, daß letzterer Umstand nur dann eintritt, wenn  $\omega$  mit einer Hohlraumeigenfrequenz mindestens einer der Leiter identisch ist. Dem Ref. sei die Bemerkung gestattet, daß ein wesentlicher Teil der sich auf unendlich gute Leiter beziehenden Fragen in einer (vom Verf. nicht erwähnten) Arbeit H. Poincarés [*Rendiconti Palermo*, **29**, 169—203 (1910)] eingehend diskutiert wird. Insbesondere wird dortselbst die Aufgabe auch auf ein System simultaner Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus zurückgeführt. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Mosharrafa, A. M.:** Material and radiational waves. *Proc. roy. Soc. Lond. A* **131**, 335—339 (1931).

Sei  $A$  ein beliebiger,  $n$  ein Einheitsvektor, der der Gleichung  $\vartheta n = dn/dt$  genügt, worin  $\vartheta$  ein Skalar. Dann definiert der Verf. den elektrischen Feldvektor  $E$  durch das Gleichungssystem

$$\frac{\partial E_\mu}{\partial x_\nu} = \cos(n x_\nu) A_\mu, \quad \frac{\partial E_\mu}{\partial t} = \vartheta A_\mu. \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Er betrachtet 2 Fälle: 1.  $A \parallel n$ . Bezeichnet man  $|A|$  als elektrische Ladungsdichte, und zwar als positive bzw. negative, je nachdem  $A$  parallel oder antiparallel zu  $n$  ist, so erhält man aus dem Gleichungssystem die Feldgleichungen für ein statisches elektrisches Feld. Bezeichnet man noch  $\vartheta n$  als die Geschwindigkeit der Ladung, so leitet der Verf. noch das Gesetz der Erhaltung der Ladung ab. 2. Fall  $A \perp n$ . Ist  $n'$  ein Einheitsvektor  $\perp$  zu  $A$  und  $n$  und setzt man  $|A| n' = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$ , so erhält man, wenn man noch  $\vartheta = \pm c$  nimmt, die Maxwellschen Gleichungen für den Fall, daß keine Ladungen vorhanden sind. Im allgemeinen Fall muß  $A$  zerlegt und für jede Komponente gesondert wie oben vorgegangen werden. Dann folgen die gesamten Maxwell-Lorentzschen Gleichungen. Der Verf. sieht nun in  $n$  die Normale einer Wellenfront, in  $\vartheta$  ihre Geschwindigkeit. Er verbindet daher eine materielle Wesenheit mit der Fortpflanzung eines longitudinalen Vektors. Das Ladungsvorzeichen hängt davon ab, ob der Vektor nach Außen oder nach Innen gerichtet ist. Eigentliche Strahlung liegt vor, wenn ein transversaler Vektor fortgepflanzt wird. Diese Ableitung der Maxwellschen Gleichungen soll die Existenz von 3 Typen physikalischer Wesenheiten zeigen: von positiver und negativer Elektrizität und von Strahlung. *Friedrich Zerner* (Wien).

**Poole, J. H. J.:** Theory of dielectrics. *Philosophic. Mag.*, VII. s. **11**, 995—996 (1931).

Es wird hervorgehoben, daß die von Guében (s. dies. Zbl. **1**, 90) abgeleitete Formel für den elektrischen Strom in einem Dielektrikum in seiner Abhängigkeit von der Feldstärke in Widerspruch steht mit den experimentellen Ergebnissen von

H. H. Poole u. a. Um diesen Widerspruch zu erklären, wird auf ein etwaiges Vorhandensein von metallischer Leitung neben der elektrolytischen Leitung in dielektrischen Substanzen hingewiesen.

O. Klein (Stockholm).

**Manarini, M.: Sulla teoria degli strati magnetici.** Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 190—194 (1931).

Auf vektoranalytischem Wege wird gezeigt, daß eine polare Magnetismusverteilung auf einer Fläche einer unpolaren Verteilung über eine Fläche und längs einer Begrenzungslinie äquivalent ist. Eine Reihe ähnlicher Theoreme lässt sich aus der Analogie zu bekannten Sätzen ableiten, die für räumliche Verteilungen gelten.

K. Bechert (München).

**Tunazima, Nagatosi: Zum Ferromagnetismus.** Z. Physik 67, 817—825 (1931).

Es wird die Richtung des unter dem Einfluß des äußeren Magnetfeldes und der magnetischen Wechselwirkungsenergie stehenden magnetischen Sättigungsmomentes eines kubischen Krystalls untersucht. Nach komplizierten Rechnungen ergeben sich bekannte Resultate für die Magnetisierungskurve.

L. Landau (Leningrad).

**Heisenberg, W.: Notiz zur Arbeit des Herrn N. Tunazima: Zum Ferromagnetismus.** Z. Physik 68, 720 (1931).

**Kapitza, P.: The study of the magnetic properties of matter in strong magnetic fields.**

**I. The balance and its properties.** Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 224—243 (1931).

In sehr hohen Magnetfeldern (bis zu 300 Kilogauss), die für die Dauer von etwa  $\frac{1}{100}$  Sek. realisiert werden können, sollen Suszeptibilitäten gemessen werden. Die Methode besteht darin, die Kraft auf einen magnetisierten Körper, der aus der betr. Substanz besteht, im inhomogenen Magnetfeld zu messen. Hierzu dient eine sehr empfindliche gedämpfte Waage hoher Schwingungszahl, deren Konstruktion und Theorie in Teil I beschrieben wird.

K. Bechert (München).

**Kapitza, P.: The study of the magnetic properties of matter in strong magnetic fields.**

**II. The measurement of magnetisation.** Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 243—273 (1931).

Teil II enthält weitere experimentelle Details der Versuchsanordnung zur Messung der Magnetisierung in sehr kurzen Zeiten. Während die Messungen anderer Autoren unter „isothermen“ Bedingungen ausgeführt wurden, hat man hier „adiabatische“ Magnetisierung zu bestimmen. Infolgedessen wird hier die Temperaturänderung, die stets mit Magnetisierung verbunden ist, von Bedeutung. Ihr Einfluß ist für Magnetisierungsmessungen gering, wie sich zeigt, für Messungen der Magnetostriktion dagegen nicht zu vernachlässigen. Resultate der Magnetisierungsmessungen: Die Magnetisierung von Eisen und Nickel bleibt bei Zimmertemperatur zwischen 50 und 280 Kilogauss konstant, in Übereinstimmung mit der Weiss-Langevinschen Theorie des Ferromagnetismus; Untersuchung einiger ferromagnetischen Legierungen; an paramagnetischen Substanzen wurden Gadoliniumsulfat und Mangan untersucht, bei Zimmertemperatur folgen beide dem linearen Curieschen Gesetz; Magnetisierung proportional der Feldstärke, bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs weicht die Magnetisierungskurve von Gadoliniumsulfat für hohe Feldstärken allmählich vom linearen Gesetz ab und strebt dem Sättigungswert der Magnetisierung zu. Die Größe dieser Abweichung steht in quantitativer Übereinstimmung mit der Langevinschen Theorie. Bei Wismut (diamagnetisch) wurde die Magnetisierung bei verschiedenen Stellungen der Krystallaxe gegen das Magnetfeld gemessen. Sie ergab sich bei Zimmertemperatur und bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs proportional zum Feld. Schließlich wird die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität des Bi für verschiedene Krystallstellungen diskutiert.

K. Bechert.

**Heyland, A.: Magnetische Streuung.** Arch. Elektrotechn. 25, 236—240 (1931).

Der Autor untersucht in einem Vektordiagramm den zeitlichen Verlauf des von zwei magnetisch verketteten Stromkreisen gemeinsam erzeugten Flusses und findet, daß dieser während eines gewissen Zeitintervalles innerhalb einer Periode Null bleibt. Damit ergibt sich vektoriell die Bestätigung einer in früheren Arbeiten anderer Autoren gefundenen experimentellen Tatsache.

Ernst Weber (New York).

### **Elektrotechnik, Schwachstromtechnik, Elektrische Schwingungen:**

**Doebke, Willi: Das Nebensprechen in Fernsprechkabeln.** (Kabelwerk Oberspree d. AEG., Berlin-Niederschöneweide.) Elektr. Nachr.-techn. 8, 63—76 (1931).

Das Nebensprechen in Fernsprechkabeln führt auf eine Randwertaufgabe für ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit sehr vielen abhän-

gigen Veränderlichen und nichtkonstanten Koeffizienten, das mit praktisch zulässiger Näherung durch ein solches System mit 4 Veränderlichen ersetzt werden kann. Dieses wird unter den betriebstechnisch auftretenden Randbedingungen integriert und die Lösung für mehrere Sonderfälle diskutiert. *W. Cauer* (Göttingen).

**Riordan, John:** Ausgleichsströme bei parallelen Einzelleitungen, von denen die eine in der Erde liegt und unendlich lang ist. *Elektr. Nachr.-Techn.* 8, 134—136 (1931).

Anknüpfung an Ollendorff [*Elektr. Nachr.-Techn.* 7, 393 (1930)], der das elektrische Erdfeld untersucht, welches von einem in einer unendlich langen Freileitung plötzlich eingeschalteten Gleichstrom herrührt, aber dafür keinen geschlossenen Ausdruck findet. Verf. leitet einen solchen her; bedeutet  $V_{12}(t)$  die in der Längeneinheit der Leitung 2 durch den Strom 1 in der Leitung 1 induzierte Spannung,  $h$  die Höhe des Drahtes 1 über,  $y$  ( $< 0$ ) die Tiefe des Drahtes 2 unter der Erdoberfläche,  $x$  den Abstand zwischen den Drähten und  $\lambda$  die Bodenleitfähigkeit, so wird

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \cdot V_{1,2}(t) = \frac{x^2 - (h+y)^2}{[x^2 + (h+y)^2]^2} \int_0^\infty e^{-z^2} dz + \sqrt{\frac{\pi \lambda}{t}} \frac{h+y}{x^2 + (h+y)^2} e^{-\pi \lambda \frac{y^2}{t}} - \sqrt{\pi \lambda} \cdot \frac{y}{\sqrt{t}} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi \lambda \frac{y}{t} + \frac{1}{h+y-ix}}{h+y-ix} e^{-\pi \lambda \frac{(h-ix)^2 - y^2}{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz + \sqrt{\pi \lambda} \frac{h-ix}{\sqrt{t}} \right\}.$$

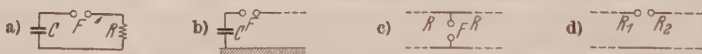
*Baerwald* (Berlin).

**Genkin, V.:** Méthode simplifiée de calcul d'une ligne de transmission d'énergie. *Rev. gén. Électr.* 29, 693—702 (1931).

La méthode algébrique faisant l'objet de l'article qui suit a pour but de simplifier les calculs numériques des lignes longues à constantes réparties. La solution hyperbolique rigoureuse est présentée sous une forme ne contenant pas d'imaginaires. Elle est complétée par une solution approchée admissible dans tous les cas pratiques et conduisant à des formules entièrement analogues à celles applicables aux lignes courtes. Dans la deuxième partie de l'article, l'auteur expose une interprétation graphique des résultats obtenus par la méthode précitée et en donne une application numérique. *Autoreferat.*

**Schilling, Walter:** Die Umbildung der Wellenform durch Kapazitäten und Induktivitäten bei durch Funken ausgelösten Wanderwellen. (*Inst. f. Elektr. Meßkunde u. Hochspannungstechn., Techn. Hochsch., Braunschweig.*) *Arch. Elektrotechn.* 25, 97 bis 122 (1931).

Auf Grund des Funkengesetzes von Toepler wird der Spannungsverlauf der durch Funken ausgelösten Wanderwellen in neuer, auch für Näherungszwecke geeigneter Form berechnet, und zwar werden die Wanderwellen der folgenden Schaltungen betrachtet:



Ferner wird der Einfluß von Kapazität und Induktivität auf die Spannungssteigerung und auf den Höchstwert dieser Wellenformen gezeigt. *Walter Fender* (Berlin Wilmersdorf).

**Petržilka, V.:** Zur Theorie zweier gekoppelter Schwingungskreise. II. (*II. Phys. Inst., Univ. Prag.*) *Elektr. Nachr.-Techn.* 8, 122—131 (1931).

Im 1. Teil (*Elektr. Nachr.-Techn.* 7, 317, 1930) wurden die Energieverhältnisse in einem System zweier gekoppelter und fremderregter Schwingungskreise durch Diskussion der Gestalt der Resonanzkurven in Abhängigkeit von Dämpfung, Kopplung und Verstimmung für den Fall  $\omega_1 = \omega_2$  untersucht. Hier werden die beiden Fälle behandelt, daß  $\omega_1$  oder  $\omega_2$  variabel und die Fremderregung  $\omega$  fest ist, sowie daß  $\omega$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  veränderlich sind, aber zwischen ihnen eine Bindung, die „Frequenzgleichung“ besteht, die mit der Phasenbilanz des Zwischenkreissenders identisch ist. Im 1. Fall sind, falls  $\omega_1$  veränderlich ist, die Energien  $W$ ,  $W_1$  und  $W_2$  (Gesamt- bzw. Teilleistung des 1. bzw. 2. Kreises) durch einfache Resonanzkurven mit einem einzigen Maximum in dem gleichen Punkte bestimmt; ist  $\omega_2$  veränderlich, so nehmen  $W$  und  $W_1$  je zwei Extrema

an, ein Maximum und ein Minimum, dagegen ergibt sich für  $W_2$  eine einfache Resonanzkurve mit einem Maximum. Angabe der Bedingungen für maximale Energieübertragung aus dem Primär- in den Sekundärkreis. — Der Fall, daß  $\omega$ ,  $\omega_1$  und  $\omega_2$  variabel, jedoch durch die Frequenzgleichung miteinander verknüpft sind, ist eigentlich das Problem des Zwischenkreissenders, über den eine reiche Literatur vorliegt. Unter Benutzung bekannter Resultate über Frequenz- und Amplitudengleichung werden die Ausdrücke für die Leistungen in Primär- und Sekundärkreis als Funktionen der Verstimmung diskutiert. Die Klassifikation der Kurven für  $W$ ,  $W_1$  und  $W_2$  wird für die verschiedenen Kopplungsverhältnisse durchgeführt und die charakteristischen Typen derselben mit ihren stabilen und instabilen Schwingungszuständen entsprechenden Teilen dargestellt; dabei wird in jedem Falle untersucht, ob das absolute Maximum der Energieübertragung auf den Sekundärkreis erreicht wird oder nicht.

Baerwald (Berlin).

**Nagaoka, Hantaro:** Application of Fermat's theorem to the propagation of radio waves. (*Inst. of Phys. a. Chem. Research, Univ., Tokyo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 85—88 (1931).

**Sommerfeld, A.:** Das Reziprozitäts-Theorem der drahtlosen Telegraphie. Z. Hochfrequenztechn. 37, 167—169 (1931).

Im Anschluß an Formeln von H. A. Lorentz (Théories statistiques en thermodynamique, appendix) hat der Verf. 1925 ein „Reziprozitäts-Theorem der drahtlosen Telegraphie“ abgeleitet. Im Beweis hat sich ein Rechenfehler vorgefunden, der jetzt berichtigt wird. Das Theorem bleibt hierdurch unberührt. M. J. O. Strutt.

**Ollendorff, Franz:** Die Beugung elektromagnetischer Wellen an kapazitiv erregten Sekundärstrahlern. (*Elektrotechn. Labor., Techn. Hochsch., Berlin.*) Elektr. Nachr. Techn. 8, 147—161 (1931).

Die Beugung elektromagnetischer Wellen von in der drahtlosen Technik üblicher Länge an Störungshindernissen auf einem ebenen Gelände wird in einer Reihe von Fällen quantitativ diskutiert, wobei die Abmessungen der Beugungszentren klein gegen die Wellenlänge sind. Durch gewisse Idealisierungen (Haus = Halbkugel; Flachbau = abgeplattetes Rotationsellipsoid; Hochhaus oder Turm = gestrecktes Rotationsellipsoid; Gebirgszug = elliptischer Zylinder) gelingt es, die Momente der feldstörenden sekundären Dipole im Anschluß an Formeln von Lord Rayleigh (the late) potentialtheoretisch zu berechnen. Namentlich in den 2 letztgenannten Fällen ist die Störung unter Umständen sehr beträchtlich. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Vollhardt, H.:** Rechnerische Bestimmung der Strom-Zeit-Kurve und des Grenzstromes. Beitrag zur Frage träger Sicherungen. Elektrotechn. Z. 1931 I, 37—40.

Bei der Bestimmung der Erwärmung einer Sicherung unter konstanter zugeführter Leistung  $I^2 R$  hat die Temperatur unter gewissen Voraussetzungen, insbesondere Unabhängigkeit des Widerstandes  $R$  von der Temperatur, folgenden Verlauf:  $\vartheta = \vartheta_m (1 - e^{-t/T})$ , wo  $\vartheta_m$  die sog. stationäre Übertemperatur bedeutet und  $T$  eine Konstante ist.  $\vartheta_m$  und  $T$  sind gesucht und sind aus der experimentell aufgenommenen Erwärmungskurve  $\vartheta = \vartheta(t)$  durch graphische Differentiation zu bestimmen:  $\vartheta'(t)$  als Funktion von  $\vartheta$  ist eine Gerade und  $T$  ist die konstante Subtangente der Kurve, bezogen auf das um  $\vartheta_m$  verschobene Koordinatensystem.

Um nun die graphische Differentiation der Exponentialkurve sehr genau zu bekommen, wird auf Grund des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zwischen den Punkten  $P_1$  mit den Koordinaten  $t_1$ ,  $\vartheta_1$  und  $P_2$  mit den Koordinaten  $t_2$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta(t_1 + h) = \vartheta_1 + k$  derjenige Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $t_1 + \sigma h$  und  $\vartheta_1 + \lambda k$  bestimmt, in dem die Tangentenrichtung übereinstimmt mit der Sehnenrichtung  $P_1 P_2$ . Für  $\sigma$  und  $\lambda$  ergeben sich konstante Werte bei konst.  $T$ , so daß, wenn  $T$  genügend genau bestimmt ist, auch  $\vartheta'$  recht genau bestimmt werden kann.

Weitere Fragen gelten dem Grenzstrom, den Verhältnissen bei einer linearen Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur und den praktischen Auswirkungen dieser Rechnungen. Meyer zur Capellen (Koblenz/Mosel).

**Schilling, Walter:** Einschaltvorgang der kapazitiv belasteten endlichen Leitung bei endlicher Stirnteilheit der Schaltwelle nach der Operatorenrechnung. (*Inst. f. Elektr. Meßkunde u. Hochspannungstechn., Techn. Hochsch., Braunschweig.*) Arch. Elektrotechn. **25**, 241—252 (1931).

Zur Berechnung des Einschaltvorganges an kurzen Leitungen, wie sie bei experimentellen Untersuchungen von Wanderwellen Verwendung finden, übernimmt der Autor die allgemeine Lösung des Ausgleichsvorganges für rechteckige Schaltwelle der Spannung von J. R. Carson (Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, deutsche Bearbeitung von F. Ollendorff und K. Pohlhausen, J. Springer 1929) für die endliche belastete Leitung, die sich im vorausgesetzten Falle der verlustlosen Leitung und mit Beschränkung auf die Vorgänge am Ende bedeutend vereinfacht. Die Lösung stellt sich als unendliche Reihe von hin- und rücklaufenden Wellen dar, deren Amplituden gegeben sind durch Integrale von Exponentialfunktionen, die leicht zu berechnen sind. Um den Einfluß der in praktischen Fällen endlichen Stirnteilheit zur Geltung zu bringen, wird in guter Übereinstimmung mit früheren Messungen eine exponentiell ansteigende Schaltwelle eingeführt, für welche die Lösung nach dem Superpositionsgesetz wieder durch einfache Integrale gefunden wird. Mißt man die Zeit in einem geeigneten Maßstabe, bezogen auf die Länge der Leitung, so kann man die Rechnungen mit den mit Hilfe des Rogowskischen Kathodenstrahloszillographen aufgenommenen und gezeigten Kurven vergleichen. Es ergibt sich eine teilweise recht gute Übereinstimmung. Ernst Weber (New York).

**Grösser, Walter:** Einige elektrostatische Probleme der Hochspannungstechnik. (*Elektrotechn. Inst., Techn. Hochsch., Aachen.*) Arch. Elektrotechn. **25**, 193—226 (1931).

Der Autor behandelt einige elektrostatische Probleme, die sich bei einer neuartigen Konstruktion eines Hochspannungstransformators ergaben. 1. Zunächst wird die Feldverteilung eines unendlichen ebenen Kondensators untersucht, wenn die Potentiale in beiden Ebenen gleichmäßig im gleichen Sinne linear anwachsen. Das Feld bleibt homogen, die Feldstärke wächst, im behandelten Falle allerdings vernachlässigbar gering. 2. Die zylindrische Transformatorwicklung wird durch eine Ebene von parallelen diskreten Drähten ersetzt und der Einfluß der Drahtrundung auf die Feldstärke untersucht. Zu diesem Zwecke verwendet der Autor die bekannte Maxwellsche Ab-

bildungsfunktion  $w = \ln \left( e^{\frac{2\pi}{a} z} - 1 \right)$ , die das Feld eines unendlichen Gitters gleichnamiger paralleler linearer Leiter vom Abstände  $a$  gegen eine unendlich ferne Ebene in das Feld eines unendlichen ebenen Kondensators überführt. Es wird eine von den wellenlinigen Potentialflächen herausgegriffen und mit Hilfe der Schumannschen Bedingung die kritische Spannung bestimmt, welche zum Durchschlage führt. Diese Bedingung lautet allgemein (W. O. Schumann, Durchbruchfeldstärke in Gasen, Julius Springer 1922):  $\int (E - E_0)^2 ds = P$ , wobei das Integral längs jener Feldlinie zu nehmen ist, für welche es den höchsten Wert erreicht.  $E$  ist die Feldstärke, es wird nur über jene Strecke integriert, wo  $E > E_0$  ist.  $E_0$  und  $P$  sind Konstante. Im Spezialfalle sind die Integrale leicht rechenbar; es ergibt sich, nach Einführung eines Welligkeitsmaßes, fast die gleiche Durchbruchsspannung wie im homogenen Falle. 3. Ein weiteres Problem ist die Ermittlung der Feldverteilung um 2 parallele, gegeneinander versetzte Halbebenen mit Hilfe des Schwart-Christoffelschen Theorems, eine der von Kirchhoff gelösten Aufgabe analoge. Um den Einfluß der Abrundung der zurückstehenden scharfen Kante zu untersuchen, wird die Feldverteilung längs einer willkürlich gewählten Potentiallinie in der Nähe der Kante berechnet und wieder das Durchschlagskriterium nach Schumann eingeführt. Die erste Rechnung längs einer speziellen Feldlinie liefert leicht berechenbare Integrale, während die Integration längs einer beliebigen Feldlinie auf elliptische Integrale führt. Im speziellen wird die Form

$$\int \frac{(w^2 + \mu^2)(w^2 + \lambda^2) \cdot dw}{(1 + w^2)^2 \sqrt{(w^2 + \mu^2)(w^2 + \lambda^2)}}$$

behandelt und auf eine Summe der 3 Normalformen zurückgeführt. Zur praktischen Berechnung des Normalintegrals 3. Gattung verwendet der Autor eine einfache Landensche Modultransformation und approximiert mit dem neuen Modul

$$K_1^2 = 1 - 1,9 \cdot 10^{-6} \quad \text{dann} \quad \sqrt{1 - K_1^2 \sin^2 \chi} \cong \cos \chi,$$

womit die Auswertung des Integrals in rationaler Form möglich wird. 4a. Als Vorbereitung zum nächsten Problem wird die praktische Berechnung des von Poisson allgemein gelösten Randwertproblems erster Art für die obere Halbebene im Falle längs der reellen Achse streckenweise konstanter Potentiale gegeben. 4b. Als letztes Problem wird die konforme Abbildung von 3 parallelen, gegeneinander versetzten Halbebenen nach Schwarz-Christoffel vorgenommen, wegen der auftretenden algebräischen Schwierigkeiten aber nur bis zur Bestimmung des Feld- und Potentialverlaufes in einem sehr speziellen Falle vorgedrungen. *Ernst Weber (New York).*

**Ingram, W. H.: Note on the operability of a synchronous motor at the end of a transmission line.** Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 244—249 (1931).

The problem of the transmission of power over a transmission line from an alternating current generator at one end to a synchronous motor at the other is easily solved when the line is uniform or made up of a small number of uniform line segments. The object of the present note is to apply the theory of integral equations to the general case of the non-uniform line. The solution obtained for the current at any point on the line in the form of a rational function of the frequency of the two alternators is of advantage when resonance effects are being considered; the latter effects are hard to trace in the case of the uniform line by the usual methods. It seems probable that numerical methods and computing devices can be developed for the solution of the integral equations given.

*Autoreferat.*

## Optik.

**Picht, Johannes: Zur Bezeichnungsfrage bei beugungstheoretischen Untersuchungen der optischen Abbildung.** (*Askania-Werke A.-G., Berlin-Friedenau.*) Z. Instrumentenkde 51, 265—271 (1931).

**Gramatzki, H. J.: Über eine neue Durchrechnungsmethode.** Z. ztg. Opt. 52, 189 bis 191 (1931).

Der Verf. führt in die Brechungs- und Übergangsformeln statt der Schnittweite den Abstand des Strahls vom Mittelpunkt ein. Besondere Vorschriften gelten für Planflächen. Gramatzki macht ferner darauf aufmerksam, daß die Durchrechnung auch ohne Kenntnis der Längen möglich ist, wenn nur deren Verhältnisse gegeben sind. Zum Schluß wird ein Beispiel durchgeführt. *H. Boegehold (Jena).*

**Schulz, H. R.: Vorrechnungsmethoden für optische Systeme.** Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 178—179 (1931).

Der Verf. beschäftigt sich mit der Vorrechnung dreilinsiger Fernrohrobjektive, bei denen die beiden letzten Linsen miteinander verkittet sind. Er stützt sich auf zwei Aufsätze von H. Harting, Z. Instrumentenkde 18, 331—335 (1898) und 24, 79—81 (1904), von denen der erste verkittete zweiteilige Mikroskopobjektive, der zweite zweiteilige Fernrohrobjektive behandelt. Schließt man an ein Fernrohrobjektiv ein anderes Objektiv an, das für einen endlichen positiven Dingabstand (also einen nicht wirklichen Gegenstand) berechnet ist, und dessen Ausmaß so gewählt ist, daß der erste Halbmesser mit dem letzten des Fernrohrobjektivs übereinstimmt, so erhält man ein dreilinsiges Objektiv, das von denselben Fehlern frei ist, wie beide Teilobjektive. Infolge der Verkittung des letzten Teiles lassen sich die sphärische Abweichung, die Koma und die Farbenabweichung nicht alle heben, Schulz entnimmt dem Hartingschen Aufsätze Formeln, die zur Hebung der Farbenabweichung und der Koma (nicht wie er irrtümlich schreibt, der sphärischen Abweichung) genügen. Er wendet seine Grundsätze auf eine Verbindung von BK I mit  $F^3$  an und erhält, den vier Formen zweiteiliger Objektive entsprechend, vier dreiteilige Formen, von denen „die vierte als Negativsystem geringere Bedeutung hat, die übrigen aber bekannteren Objektivformen nahestehen“. *H. Boegehold (Jena).*

● **Picht, Johannes: Optische Abbildung. Einführung in die Wellen- und Beugungstheorie optischer Systeme.** (Die Wissenschaft. Hrsg. v. Wilhelm Westphal. Bd. 84.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1931. X, 243 S. u. 65 Abb. RM. 20.—.

Die Arbeit behandelt die Beugungstheorie der optischen Abbildung. Als frühere Bearbeitungen erwähnt der Verf. die bekannte Schrift von K. Strehl aus dem Jahre

1892 und die beiden Handbuchartikel von F. Jentzsch und A. König (beide 1929). P. selbst hat in den letzten Jahren in verschiedenen Zeitschriften hierher gehörige Fragen untersucht, diese Aufsätze sind im vorliegenden Büchlein zusammengefaßt und weitergeführt, doch auch Arbeiten anderer Verfasser (M. Berek, R. Richter, Y. Väisälä) sind berücksichtigt. Die ersten Kapitel enthalten zunächst die allgemeinen Formeln der elektromagnetischen Lichttheorie, sodann die Behandlungen der Beugungslehre nach dem Huygensischen Prinzip in der Fresnelschen Darstellung, sowie in der Kirchhoffschen Fassung. Es folgen einige Bemerkungen über Selbstleuchter und Nichtselbstleuchter. Hierauf wird der Fall einer im Sinne der geometrischen Optik strengen Abbildung eines Punktes untersucht, und zwar zuerst in der älteren, von G. B. Airy, E. Lommel, K. Strehl gegebenen Weise, sodann nach der Darstellung von P. Debye (1909), unter Anwendung der Kirchhoffschen Formel. Die Lichtverteilung in der Brennebene, in der Achse wird besonders untersucht, auch die Bereksche Zeichnung gebracht. Ein kurzer Abschnitt behandelt die Erscheinungen bei nicht einfarbigem Lichte. In der Debyeschen Formel kommt außer den Koordinaten des Aufpunktes und den von der Blendenöffnung abhängigen Integrationen eine Funktion  $\psi$  (der Belegungsfaktor) vor, deren Quadrat die Lichtverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche angibt. Im allgemeinen nimmt P.  $\psi = \text{const.}$  oder  $\psi = \cos \vartheta$  an, wo  $\vartheta$  der Winkel mit dem Hauptstrahl ist. Ein besonderes Kapitel behandelt indessen die Abhängigkeit des (bildseitigen) Belegungsfaktors von der (dingseitigen) Strahlung und die Wirkung einer Ungleichmäßigkeit auf die optische Abbildung. Die zweite Hälfte des Buches untersucht die Wirkung der geometrisch-optischen Fehler nach der Beugungstheorie. Die Debyesche Formel wird auf den Fall verallgemeinert, daß die Wellenflächen keine Kugeln sind, sondern andere Gestalt haben (vgl. dies. Zbl. 1, 92 „Zur . . . Behandlung des Komafehlers . . .“). Das erwähnte Kapitel (das 8.) enthält weiter die Ableitung der Beugungsformel aus der Kaustik und die Umkehrung der gelösten Aufgabe (Herleitung der Wellenfläche aus der Integraldarstellung). Sodann ist ein Abschnitt über Spiegelung und Brechung eingeschaltet. Die drei letzten Kapitel behandeln die Abbildungsfehler, und zwar sphärische Abweichung, Astigmatismus und Koma, wobei die Koma ebenso erklärt ist wie in dem schon angeführten Aufsatz. Die sphärische Abweichung wird besonders ausführlich untersucht (1, 2, 3 Koeffizienten der Entwicklung, Benutzung verschiedener Ableitungen). Für die Lichtverteilung ergeben sich überall Reihen von Besselschen Funktionen. In vielen Fällen wird nicht nur die dreidimensionale, sondern auch die zweidimensionale Aufgabe (Zylinderwelle mit oder ohne Abweichung) behandelt.

H. Boegehold (Jena).

**Picht, Johannes:** Zur sphärischen Aberration mit mehreren Koeffizienten. (*Wiss. Abt., Askania-Werke, Berlin-Friedenau.*) Z. techn. Phys. 12 (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 180—182 (1931).

Vgl. dies. Zbl. 1, 93.

**Picht, Johannes:** Zur beugungstheoretischen Behandlung des Komafehlers. (*Wiss. Abt., Askania-Werke, Berlin-Friedenau.*) Z. techn. Phys. 12 (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 182—185 (1931).

Vgl. dies. Zbl. 1, 92.

**Gibrat, R.:** Sur l'optique des structures hétérogènes uniaxes. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 804—806 (1931).

Betrachtungen über die Struktur einachsiger Kristalle. Die Moleküle ordnen sich in Scharen paralleler Flächen beliebiger Gestalt an, von denen allerdings bisher nur die einfachsten Arten bekannt sind. Beziehungen zwischen der Struktur der Kristalle und den Wellenflächen der außerordentlichen Strahlen. Ausgehend vom Fermatschen Prinzip, wird unter Benutzung krummliniger Koordinaten die Differentialgleichung der Wellenflächen aufgestellt und für einen Spezialfall sowie allgemein diskutiert.

Picht (Neubabelsberg).

**Gibrat, R.:** Sur l'optique des structures hétérogènes uniaxes. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1094—1096 (1931).

Die in einer früheren Arbeit (vgl. vorstehendes Referat) angestellten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Struktur einachsiger Krystalle und der Optik des außerordentlichen Strahles (vgl. vorst. Referat) werden in vorliegender Arbeit auf solche Körper ausgedehnt, die keine parallele Struktur aufweisen. *Picht.*

**Schaefer, Clemens:** Achromatische Interferenzstreifen und Gruppengeschwindigkeit. (Phys. Inst., Univ. Breslau.) Z. Physik 68, 764—765 (1931).

Pflanzen sich die Wellen (verschiedener Wellenlänge  $\lambda$ ) einer Wellengruppe mit der von  $\lambda$  abhängenden Phasengeschwindigkeit  $v$  fort, so pflanzt sich bekanntlich das durch Überlagerung der verschiedenen Wellen entstehende Amplitudenmaximum mit der von  $v$  verschiedenen Gruppengeschwindigkeit  $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$  fort. Der Verf. zeigt nun, daß eine ganz analoge Beziehung für die Verlagerung des „Nullinterferenzstreifens“ im weißen Licht gilt, wenn man die Interferenzerscheinung durch ein Prisma betrachtet. Bezeichnet man nämlich die durch das Prisma bewirkte Verschiebung der Streifen durch  $v$ , so ist  $v$  wieder infolge der Dispersion des Prismas eine Funktion der Wellenlänge. Für die „Nullinterferenz“ aber ergibt sich dann eine Verschiebung  $u$ , die mit  $v$  durch dieselbe Gleichung wie oben verbunden ist. Verf. weist noch auf den physikalischen Grund für diese Übereinstimmung hin. Der Nullstreifen stellt geradezu ein Gruppenmaximum dar. *Picht* (Neubabelsberg).

**Buchbinder, Andreas:** Zur Theorie der Ulbrichtschen Kugel. Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 164—167 (1931).

Die Ulbrichtsche Kugel ist bekanntlich ein Photometer zur Bestimmung der „mittleren räumlichen Lichtstärke“, also des über alle Richtungen des Raumes gemittelten Wertes der Lichtstärke einer vorgegebenen Lichtquelle. Es handelt sich um eine undurchsichtige, innen mattweiße Hohlkugel, in die die zu untersuchende Lampe hineingehalten wird. Die Innenfläche der Hohlkugel wird dann durch das indirekte, d. h. vielfach reflektierte Licht an allen Stellen gleich stark beleuchtet, und zwar proportional der mittleren räumlichen Lichtstärke. Betrachtet man diese Innenfläche durch ein kleines Fenster in der Wandung, so leuchtet sie durch das Fenster hindurch mit einer dieser mittleren räumlichen Lichtstärke proportionalen Flächenhelle. Verf. beweist den genannten Fundamentalsatz, betreffend die Proportionalität der inneren Beleuchtung mit der mittleren räumlichen Lichtstärke, von neuem theoretisch. Er geht zunächst von einer beliebigen konkaven Fläche aus, von der jedes Element nach dem Lambert'schen Gesetz strahlen soll, und stellt für diese eine Gleichung auf, aus der sich die Flächenhelle berechnen läßt. Auch für den insgesamt absorbierten Betrag der Lichtmenge wird ein mathematischer Ausdruck abgeleitet unter der Voraussetzung, daß der Reflexionskoeffizient  $\varrho$  der betreffenden Fläche bekannt ist. Es wird ferner gezeigt, daß auch für eine unvollständige Kugel, also für ein beliebiges Stück  $f$  einer Kugelfläche die durch indirekte Beleuchtung hervorgerufene Flächenhelle auf  $f$  überall die gleiche ist und dem von der Lichtquelle nach  $f$  ausgestrahlten Lichtstrom proportional ist. Ferner: Der Bruchteil des Lichtstromes, der durch  $f$  absorbiert wird, ist gleich  $(1 - \varrho)/(1 - \varepsilon\varrho)$ , wo  $\varepsilon$  das Verhältnis der Fläche  $f$  zur ganzen Kugelfläche ist. Endlich: Ist die durch indirekte Beleuchtung einer vollkommen diffus reflektierenden Fläche  $f$  hervorgerufene Flächenhelle überall auf  $f$  konstant — bei beliebiger Intensitätsverteilung in der Lichtquelle —, so ist  $f$  ein Teil einer Kugel. Die Kugel ist also die einzige Fläche, die die obengenannte Fundamentealeigenschaft besitzt, und daher die einzige Fläche, die zur Bestimmung des Lichtstromes geeignet ist. *Picht* (Neubabelsberg).

**Genkin, V.:** Calcul de l'éclairement moyen en présence des surfaces diffusantes de brillance uniforme. Rev. gén. Électr. 29, 369—375 (1931).

Zunächst werden zwei beliebige Flächen vorausgesetzt, die diffus nach dem

Lambertschen Gesetz reflektieren und sich so gegenseitig anstrahlen. Verf. zeigt, daß der Betrag dieses Lichtflusses allein von den Begrenzungskurven der beiden Flächen abhängt, von der Form der Flächen selbst also unabhängig ist. Das Ergebnis wird sodann auf den speziellen Fall angewandt, daß die Begrenzungskurven Rechtecke sind, und es wird gezeigt, daß die mittlere Beleuchtung von der „mittleren geometrischen Entfernung“ der Kurven abhängt. Diese „mittlere geometrische Entfernung“  $\Delta$  wird definiert durch die Formel  $LL' \ln \Delta = \int_L \int_{L'} \ln r \, dl \, dl'$ , wo  $L, L'$  die Längen der

Kurven (Geraden) sind und  $r$  der Abstand der einzelnen Produkte der einen Kurve (Gerade) von denen der anderen ist. Die Überlegungen werden weiter auf ein Parallelepiped angewandt, dessen Deckfläche mit bestimmter Intensität  $\varepsilon$  ihr Licht auf die Grundfläche wirft. Die mittlere Erleuchtung der Grundfläche ergibt sich zu

$$\Phi = \varepsilon \pi K L_1 L_2,$$

wo  $L_1, L_2$  die Seitenlängen des Grundflächenrechtecks sind und  $K$  ein Proportionalitätsfaktor ist, der von  $L_1, L_2$  und den mittleren geometrischen Entfernungen  $\Delta_{11'}, \Delta_{13'}, \Delta_{22'}, \Delta_{24'}$  abhängt. Hier beziehen sich die ungestrichenen Zahlen auf die Seiten der rechteckigen Grundfläche, die gestrichenen Zahlen auf die entsprechenden Seiten der Deckfläche. Die Formel für  $K$  wird in einer Kurve graphisch dargestellt, so daß für die Anwendungen der Wert  $K$  aus dieser Kurve abzulesen ist. In einem weiteren Absatz wird noch berücksichtigt, daß auch die Seitenwände reflektiertes Licht auf die Grundfläche werfen. In einem Anhang werden einzelne in der eigentlichen Arbeit benötigte Formeln mathematisch abgeleitet. *Picht* (Neubabelsberg).

**Straubel, R.: Über die Beleuchtung von Schirmen durch Linsensysteme.** (*Zeiss-Werk, Jena.*) Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 129—133 (1931).

Der Verf. betrachtet — allgemein gesagt — eine Lichtquelle, die ihr Licht durch ein oder zwei Linsensysteme auf einen Schirm wirft, diesen also beleuchtet, und fragt nach der Abhängigkeit dieser Beleuchtung von den Eigenschaften der Lichtquelle (Strahlungsdiagramm), des oder der optischen Systeme (Absorption und Richtungsänderung der Lichtstrahlen) und des (evtl. gekrümmten) Schirmes. — Für das Resultat, zu dem der Verf. gelangt, sind gewisse Größen wesentlich, die sich auf 3 Stellen des Strahlenganges beziehen, nämlich 1. auf den Ort der Lichtquelle, 2. auf den Ort des durch den Kondensor von der Lichtquelle entworfenen Bildes und 3. auf den Ort des Projektionsschirmes. Die zugehörigen Größen seien durch die Indizes 1, 2, 3, die Neigungswinkel der Hauptstrahlen der einzelnen von der Lichtquelle ausgehenden Strahlenbündel gegen die optische Achse durch  $u_1$  bzw.  $u_2$  und  $u'_2$  bezeichnet, während  $u_3$  der Winkel jener Strahlen gegen die Flächennormale des Projektionsschirmes sei. Die relative Beleuchtungsstärke (nämlich relativ zur entsprechenden Größe auf der optischen Achse) auf dem Schirm sei  $b_3$ , die relative Strahlungsintensität der Lichtquelle sei  $l_1$ , die relative Entfernung des Schirmes vom Punkte 2 sei  $r (= R/R_0)$ , die relative Absorption in den optischen Systemen sei  $A$ . Es werde Rotationssymmetrie vorausgesetzt. Dann ist  $r = r(u'_2)$ ;  $l_1 = l_1(u_1)$ ;  $b_3 = b_3(u'_2)$ , während  $A$  Funktion von  $u_1, u_2$  und  $u'_2$  ist. Da sich ja an der Stelle 2 das Projektionsobjektiv befindet, so ist im allgemeinen  $u'_2$  von  $u_2$  verschieden, allerdings nur wenig; ist der Schirm eben, so ist  $u_3 = u'_2$ . Für die relative Beleuchtungsstärke ergibt sich

$$b_3(u'_2) = A \frac{l_1(u_1)}{r^2(u'_2)} \frac{\cos u_3 \cdot \cos u'_2}{\cos u_1 \cdot v_0^2} \frac{n_1^3 \sin u_1 \cos u_1 \, du_1}{n_2^3 \sin u_3 \cos u_3 \, du_2},$$

wo noch  $v_0$  das axiale Vergrößerungsverhältnis im Punkte 2 bedeutet.  $n_1$  und  $n_2$  sind die Brechungsindizes an den Stellen 1 und 2. Die angegebene Differentialgleichung zwischen  $u_1$  und  $u_2$  besagt: Um bei beliebig gegebenem Strahlungscharakter der Lichtquelle und beliebig gegebener Schirmform eine beliebig geforderte Beleuchtungsverteilung zu erzielen, ist (neben der noch vorausgesetzten Homozentrität der Büschel) notwendig, aber auch hinreichend, daß eine bestimmte aus der Differentialgleichung

zu errechnende Zuordnung der Büschelachsen durch das optische System verwirklicht wird. — Verf. spezialisiert sodann die Funktionen  $b_3, A, l_1$  und  $r$ , indem er setzt:

$$b_3 = \cos \beta u'_2; \quad A = \cos \alpha_1 u_1 \cdot \cos \alpha_2 u_2 \cdot \cos \alpha'_2 u'_2; \quad l_1 = \cos^2 u_1; \quad r = \cos^2 u_2,$$

wodurch sich die Differentialgleichung wesentlich vereinfacht. Wird noch  $u'_2 = u_2$  gesetzt und beschränkt man sich für  $\varrho$  auf die Werte  $-1, 0, +1$ , so daß  $\cos u_3 = \cos^\sigma u_2$  mit  $\sigma = +1, 0, +1$  ist, so wird

$$\frac{1 - \cos^{\mu_1} u_1}{\mu_1} = w_0^2 \frac{1 - \cos^{\mu_2} u_2}{\mu_2},$$

wo noch

$$\mu_1 = \alpha_1 + \lambda + 1; \quad \mu_2 = \beta + 2\varrho - \alpha_2 - \alpha'_2 - \sigma + 1; \quad w_0 = \frac{n_2}{n_1} v_0.$$

Diese sehr einfache, aber noch sehr allgemeine Formel wendet Verf. auf 18 spezielle Fälle an. Er setzt zunächst richtungsunabhängige Absorption voraus, also  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha'_2 = 0$ . Bei der Lichtquelle unterscheidet er zwischen Kugelstrahler ( $\lambda = 0$ ) und Lambertstrahler ( $\lambda = 1$ ). Bezüglich Schirmform werden betrachtet ein Kugelschirm, dessen Krümmungsradius  $= \frac{1}{2} R_0$  ist, ferner ein Kugelschirm, dessen Radius  $= R_0$  ist, und endlich ein ebener achsensenkrechter Schirm. Hierfür gilt also  $\varrho = +1, \sigma = +1$  bzw.  $\varrho = 0, \sigma = 0$  bzw.  $\varrho = -1, \sigma = +1$ . Bezüglich der relativen Beleuchtungsstärke werden die Fälle betrachtet, daß diese umgekehrt proportional zu  $\cos u_2$  bzw. konstant bzw. direkt proportional zu  $\cos u_2$  ist ( $\beta = -1$  bzw.  $0$  bzw.  $+1$ ). Verf. betrachtet noch die Fläche, die durch die Schnittpunkte der von 1 ausgehenden und der nach 2 hinzielenden Strahlen gegeben ist. Diese Fläche bezeichnet er als „Zuordnungsfläche“, den Achsenschnitt dieser Fläche als „Zuordnungskurve“, während er die Gleichung zwischen  $u_1$  und  $u_2$  „Zuordnungsgleichung“ nennt. Verf. bestimmt die Gleichung der Zuordnungskurve und gibt eine Formel für ihren Krümmungsradius im Achsenschnittpunkt. Erfüllt das optische System die Sinusbedingung, so ist die Zuordnungskurve ein Kreis. Es werden außerdem Fälle betrachtet, in denen die Zuordnungskurve eine Ellipse, Hyperbel und Parabel ist. — Verf. stellt eine weitere Behandlung der Schirmbeleuchtung in Aussicht, in der ähnliche, aber andere Voraussetzungen gemacht werden sollen.

*Picht* (Neubabelsberg).

**Buehbinder, Andreas: Die Wirkung unregelmäßiger, höckriger Streuscheiben. Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 162—164 (1931).**

Der Verfasser behandelt die Aufgabe, die Unregelmäßigkeiten der Strahlung eines Scheinwerfers durch eine Scheibe mit unregelmäßiger höckriger Oberfläche auszugleichen. Der Einfachheit halber nimmt er einen nicht räumlich, sondern flächenhaft verteilten Lichtstrom an, und ebenso eine eindimensional wirkende Streuscheibe. Die Lichtstärke des Scheinwerfers ist also nur von einer Winkelgröße  $\vartheta$  abhängig, bei einem vollkommenen Scheinwerfer oder beim Durchschnitt einer großen Zahl wirklich ausgeführter Scheinwerfer ist sie für  $-\Theta \leq \vartheta \leq +\Theta$  eine feste Größe  $\bar{\mathcal{L}}$ , im Einzelfall eine Funktion  $\mathcal{L}(\vartheta)$ . Die Scheibe wird betrachtet, als bestehe sie aus vielen kleinen Prismen, die das Licht um Winkelbeträge  $\sigma$  ablenken, wobei  $-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0$  sei, und  $\sigma_0$  klein gegen  $\Theta$  angenommen wird. Weiter wird vorausgesetzt, daß alle Winkel  $\sigma$  zwischen  $-\sigma_0$  und  $+\sigma_0$  gleich häufig vorkommen. Für die Abweichungen des Scheinwerfers werden zwei Möglichkeiten untersucht: a) Periodischer Verlauf:  $\mathcal{L}(\vartheta) = \bar{\mathcal{L}} + A \cos\left(2\pi \frac{\vartheta}{\tau} + \psi\right)$ , wobei  $A$  und  $\tau$  für die einzelnen Ausführungen dieselben Werte haben mögen,  $\psi$  alle Werte zwischen  $+\pi$  und  $-\pi$  annehmen kann. B. erhält für die durchschnittliche Abweichung der Lichtstärke vom Mittel  $d_0 = |\mathcal{L} - \bar{\mathcal{L}}| = \frac{2A}{\pi}$ , bei Einschaltung der Streuscheibe aber  $d_s = \frac{1}{2\sigma_0} \cdot \frac{2\tau A}{\pi^2} \left| \sin \frac{2\pi\sigma_0}{\tau} \right|$ , die Ungleichmäßigkeit ist also im Verhältnis  $\frac{\tau}{2\pi\sigma_0} \sin \left| \frac{2\pi\sigma_0}{\tau} \right|$  verringert; je größer die Streubreite  $\sigma_0$  ist, um so stärker ist die Verringerung. b) Zufälliger Verlauf. B. erhält

$d_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}$ , wobei  $h$  von der Unregelmäßigkeit der Strahlung abhängt.  $d_0$  ist bei Annahme rein zufälliger Verteilung nicht festzulegen. B. stellt sich vor, „daß schon beim nackten Scheinwerfer die Unregelmäßigkeiten durch eine virtuelle Streuscheibe von der Streubreite  $s$  teilweise ausgeglichen sind“. Er erhält dann  $\frac{d_s}{d_0} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\sigma_0}}$ , die Abweichungen werden im Verhältnis der Wurzel der Streubreite geringer.

H. Boegehold (Jena).

**Joachim, H.: Die Helligkeitsverteilung bei der optischen Abbildung ebener Strahler.** Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 133–142 (1931).

Der Verf. behandelt die lichttechnischen Eigenschaften optischer Apparate, wie sie besonders für Projektionsgeräte in Betracht kommen. In den ersten Paragraphen werden die einzelnen wesentlichen Begriffe mit ihren mathematischen Formulierungen zusammengestellt bzw. erklärt. Im einzelnen wird die Beleuchtungsstärke  $E$  als partielle Ableitung des von Fläche und Öffnungswinkel abhängenden Lichtstromes  $\Phi$  nach der Fläche definiert. Die partielle Ableitung nach dem Öffnungswinkel gibt die Lichtstärke  $I$  (in bestimmter Richtung). Der zweite Differentialquotient nach Fläche und Öffnungswinkel gibt die spezifische Lichtstärke  $i$ , die natürlich auch noch von der Richtung  $\vartheta$  abhängig ist. Die Leuchtdichte  $B$  ist gleich der spezifischen Lichtstärke, dividiert durch den  $\cos$  des Richtungswinkels, also  $B(\vartheta) = i(\vartheta)/\cos \vartheta$ . Als Maßeinheit dient das Stilb. Die vektorielle Darstellung der spezifischen Lichtstärke gibt die Lichtverteilungskurve. Für die Lambertsche Strahlung ist diese ein durch die Lichtquelle gehender Kreis, während die zugehörige Kurve der Leuchtdichte ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in der Lichtquelle liegt. In der Achse berühren sich beide Kreise. Es werden sodann einige Hilfssätze aus der Optik hergeleitet, wobei vorausgesetzt wird, daß die optischen Systeme frei von Aberration und aplanatisch im Sinne der Sinusbedingung sind. Es wird gezeigt, daß die Leuchtdichte in Richtung konjugierter Strahlen, abgesehen von Reflexions- und Absorptionsverlusten beim Durchgang durch das optische System erhalten bleibt. Für die Lichtverteilungskurve gilt dies nicht allgemein, wohl aber gilt für die Lambertsche Strahlung der Satz: „Ist die ursprüngliche Strahlung im Objektraum eine schwarze Strahlung von der Leuchtdichte  $B$ , so ist auch die Strahlung im Bildraum eine schwarze Strahlung von der gleichen Leuchtdichte  $B$ .“ Für die übrigen Strahlungsarten werden Konstruktionsvorschriften für den Übergang vom Objektraum zum Bildraum angegeben. So zeigt sich, daß jede im Objektraum außerhalb bzw. innerhalb des Lambertschen Kreises verlaufende Lichtverteilungskurve auch im Bildraum außerhalb bzw. innerhalb des entsprechenden Sektors der zugehörigen Lambertschen Strahlung liegt. Es gelten ferner folgende Sätze: „Bei Vergrößerung 1 bleibt die Form der Lichtverteilungskurve erhalten. Weicht die ursprüngliche Strahlung von der Lambertschen Strahlung ab, so wird die Abweichung bei vergrößernden optischen Systemen ebenfalls vergrößert, bei verkleinernden Systemen verkleinert und geht bei hinreichender Verkleinerung in eine Lambertsche Strahlung im Bildraum über.“ Verf. untersucht weiter die Beleuchtungsstärke an den verschiedensten Stellen des Strahlungsganges und zeigt das charakteristische Verhalten der verschiedenen Strahlungsarten in einer graphischen Darstellung. Auch die durch Einschaltung von Diaphragmen bewirkten Änderungen im glatten Verlauf der die Beleuchtungsstärke als Funktion der Entfernung darstellenden Kurve werden diskutiert. Es wird sodann untersucht, welche Änderungen sich ergeben, wenn das Diaphragma durch ein aplanatisches Linsensystem ersetzt wird. Endlich wird noch der Verlauf der Lichtströme und Beleuchtungsstärken eines optischen Bildes für verschiedene Objekt- und Bildabstände graphisch diskutiert. Es zeigt sich, daß die Beleuchtungsstärken im Bild nur abhängig sind von dem Öffnungswinkel, unter welchem das Linsensystem vom Bild aus erscheint. Endlich wird noch angegeben, wie man auf einfachste Weise die Beleuchtungsstärken bei optischen Systemen errechnen kann.

Picht (Neubabelsberg).

Sauer, H.: Beiträge zur Trübungsmessung. (Zeiss-Werk, Jena.) Z. techn. Phys. 12, (Techn.-opt. Sonderh. Nr 1), 148—162 (1931).

Vorliegende Arbeit verfolgt rechnerisch — unter Vernachlässigung mehrfacher Diffusion — und zum Teil auch experimentell die Lichtzerstreuung in flüssigen, trüben Medien und wendet sich schließlich der Ableitung und Ausprobierung eines einen zahlenmäßigen Vergleich unabhängiger Messungen ermöglichenden rationellen Trübungsmaßes zu. Unter Beschränkung auf den einfachen Fall der Beleuchtung einer in der Richtung der Begrenzungsflächen unendlich ausgedehnten, homogenen isotropen Schicht eines trüben Mediums durch parallel auffallende monochromatische, unpolarisierte Strahlen werden zunächst unter der Annahme, daß für die Lösung keine eigentliche (sog. echte) Absorption in Frage kommt — so daß der Streukoeffizient „ $k$ “ proportional dem Extinktionskoeffizienten für die Längeneinheit „ $k$ “ gesetzt werden kann —, die Beziehungen zwischen Streuintensität, Extinktion und Schichtdicke, soweit es zum Verständnis der verschiedenen Beobachtungsmethoden nötig ist, der Rechnung unterzogen. Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Beerschen Gesetzes — die von der Zahl der streuenden Teilchen unabhängige Streufunktion „ $f(\vartheta)$ “ geht überall als konstanter Faktor ein — findet Verf. für eine nicht zu starke Konzentration für verschiedene Einfall- und Beobachtungsrichtungen eine lineare Beziehung zwischen dieser (entsprechend Extinktion) und der Streuintensität. Weiter findet er für den hierdurch angedeuteten Bereich des linearen Kurvenanstiegs direkte Proportionalität zwischen Streuintensität und Tiefe der Flüssigkeitsschicht in der Beobachtungsrichtung. Indem er sich nun den praktisch wichtigen Fällen zuwendet, bringt er mit kurzer Erörterung der bei den verschiedenen Typen der Trübungsmesser angewandten prinzipiellen Methoden mathematische Formulierungen: a) für den für die Fluoreszenzuntersuchungen wichtigen Fall der Beobachtung in Richtung der Beleuchtung; b) mit Anwendung auf Fluoreszenzmessungen für den Fall der Beobachtung l. Beleuchtungsrichtung (Tyndallmeter nach Mecklenburg und Valentiner und die Nephelometer vom Dubosq-Typus) und c) für den der Beobachtung unter  $45^\circ$  zur Beleuchtungsrichtung (Zeiss'scher Trübungsmesser). Die Berechnungen unter c) werden mit Untersuchungen an Mastixsuspensionen mit verschiedener Konzentration verglichen, und zwar sowohl für Bechergläser verschiedener Durchmesser als auch für Planküvetten verschiedener Schichtdicke. Dabei ergibt sich bis zu einem gewissen kritischen Konzentrationsmaximum, bei der im Beobachtungsfalle die mehrfache Streuung merklich ins Gewicht fällt, eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Wichtig ist, daß für beide Fälle die Helligkeit bei jeder Gefäßform zunächst mit der Konzentration zunimmt und daß dann — bis zu dem bezeichneten Maximum — die Helligkeitszunahme dauernd langsamer erfolgt. — Für gewisse, aus der Arbeit zu ersiehende Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Beobachtung werden Korrekturfaktoren „ $f(k)$ “ für verschiedene Untersuchungsgefäße gegeben. Im 10. Kapitel werden die wesentlichen Vorzüge der 3 Anordnungen in verschiedener Hinsicht kurz zusammengestellt. Die neuere Zeit lieferte zahlreiche Untersuchungen über die Lichtzerstreuung an einzelnen Teilchen (s. u. a. die Arbeiten von Blumer, Cabannes, Gans und Pokrowski). Da es aber für die Optik kolloidaler und trüber Lösungen nicht weniger wichtig ist, die für verschiedene Extinktionskoeffizienten und Schichtdicken geltenden Beziehungen zwischen der Zerstreufunktion der einzelnen Partikelchen und der tatsächlich beobachteten Streuintensität in verschiedenen Richtungen zu kennen, werden diese Verhältnisse in den 2 folgenden Abschnitten unter Berücksichtigung des Rayleighschen Gesetzes der Rechnung unterzogen. Besonders beachtenswert erscheint auch der Abschnitt 15. Verf. geht aus von dem Gedanken, daß auch die eine konstante Vergleichshelligkeit benutzenden Anordnungen von Mecklenburg und Valentiner sowie von Kleinmann und von Pulfrich (Ergänzung des Zeiss'schen Trübungsmessers) an dem Übelstand leiden, daß das willkürlich gewählte Maß für die Stärke des Streulichts für jeden Apparat verschieden ist, d. h., daß es nur die Bedeutung einer Apparatkonstanten hat. Er macht den Vorschlag, in Zukunft zwecks Vergleichung der mit verschiedenen Apparaten erhaltenen Resultate das Verhältnis des Streulichtes zum Primärlight zur Kennzeichnung des Trübungsmaßes heranzuziehen. Er schlägt als Definition für dasselbe das Verhältnis der von einer 1 cm tiefen Schicht in der Beobachtungsrichtung ausgestrahlten Lichtmenge zu derjenigen vor, die in diese Richtung gestreut werden müßte, wenn die gesamte Primärstrahlung gleichmäßig nach allen Seiten zerstreut wird. Es folgt die Untersuchung der Beziehung dieses Trübungsmaßes zu anderen Maßeinheiten, wobei nur kurz auf diffus zerstreute Oberflächen sowie auf die auf dem Verhältnis der direkten Durchlässigkeit zur „relativen Leuchtdichte“ unter einem Winkel von  $45^\circ$  basierende Klassifizierung der Deutschen Beleuchtungstechnischen Gesellschaft hingewiesen sei. Sauer selber prüfte unter tunlichster Elimination aller bei photometrischen Messungen möglichen Fehlerquellen die Trübungswerte der im Zeiss'schen Apparat benutzten Trübungskörper. Die Schemata der Aufstellungen zur Eichung von Standardtrübungen sind kurz angegeben. Schließlich zeigt er an einem Beispiel (Ausführung einer Messung in verschiedenen Gefäßen mit dem Zeiss'schen Apparat), welche Trübung sich bei Anwendung seines Maßes ergibt.

Chr. Jensen (Hamburg).

**Lalan, V.:** L'hypothèse de la courbe de poursuite et les lois de la réflexion dans les systèmes optiques en mouvement. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 614—616 (1931).

L'auteur développe les idées de M. Sesmat (vgl. dies. Zbl. 1, 91) selon lesquelles l'action lumineuse se propage sur une courbe de poursuite. En identifiant la longueur de cette courbe avec le chemin optique  $l$  et en s'appuyant sur le principe des interférences l'auteur retrouve le théorème de Fermat. La réflexion dans un miroir en mouvement est considérée ensuite. La formule qui détermine  $l$  et la position du point réfléchissant, obtenue dans l'hypothèse de la courbe de poursuite, est comparée avec celles de la théorie classique et de la théorie de relativité. *V. Fock.*

## Quantentheorie.

● **Darrow, Karl K.:** Elementare Einführung in die physikalische Statistik, insbesondere in die Theorie des metallischen Zustandes. Aus dem Engl. übersetzt u. erg. v. Eugen Rabinowitsch. Mit einem Vorwort v. M. Born. Leipzig: S. Hirzel 1931. VI, 118 S. u. 3 Abb. RM. 6.—.

Das Buch bedarf kaum einer Empfehlung, da sowohl sein Verf. als sein Übersetzer rühmlich bekannt sind für die Fähigkeit, Gedankengänge der neuesten Physik einem breiteren Leserkreis nahezubringen. Auch ist ihm in dem Vorwort Borns ein ausgezeichnete Fürsprecher entstanden. Doch sei hier gerne bestätigt, daß die moderne statistische Methode in sehr anschaulicher und eindringlicher Weise geschildert ist. Einem Leser, der sie unbeschwert von langen Rechnungen kennenlernen will, kann die Lektüre nur warm empfohlen werden. Er wird mit den theoretisch physikalischen Kenntnissen eines normalen Studiums experimenteller Richtung imstande sein, die abzählende Statistik nach klassischen und quantentheoretischen Grundsätzen daraus zu verstehen. Er wird ferner mit Freude die Aufzählung jener schönen und fruchtbaren Folgerungen lesen, welche für das Verständnis der metallischen Eigenschaften aus der Vorstellung des freien Elektronengases Fermischer Statistik im Innern der Metalle gewonnen werden können und hier in straffer und übersichtlicher Folge wiedergegeben sind. Dem Ref. scheint allerdings, daß auf dieser zweiten Hälfte das Schwergewicht des Darrowschen Buches liegt; hier kommen die Vorzüge der vereinfachten, oft nur berichtenden Darstellung voll zur Wirkung, während in der methodischen ersten Hälfte eine vollständigere Rechnung an manchen Stellen erwünscht gewesen wäre. Als ein besonderer Gewinn der deutschen Ausgabe darf der kurze Abschnitt über die wellenmechanische Herleitung des elektrischen Leitungswiderstandes hervorgehoben werden; er entstammt zum Teil der Feder W. Blochs und schildert den Gedankenkreis zahlreicher und umfangreicher theoretischer Arbeiten in überzeugender Weise. *Fues.*

**Born, Max, und Georg Rumer:** Ansätze zur Quantenelektrodynamik. Z. Physik 69, 141—152 (1931).

Die Arbeit enthält einen Versuch, grundsätzlich über die Grenzen der bisherigen, bekanntlich in gewisse (anscheinend nur durch wesentlich neue Gedanken lösbare) Schwierigkeiten verwickelte Quantenmechanik hinauszukommen. Der entscheidende Gedanke ist dieser: Die bisherige Quantenmechanik schreibt dem Impulsvektor  $p$  eines Teilchens (Elektron, Atom, Lichtquant) eine Eigenwertverteilung zu, die im ganzen „Raume“ der  $p$ -Komponenten gleichmäßige Dichte besitzt. Es wird nun vorgeschlagen, an Stelle dieser Dichteverteilung hypothetisch eine andere zu setzen: wenn diese insbesondere die Eigenschaft hat, daß die Gesamtzahl aller Eigenwerte endlich statt unendlich wird, so ergibt sich z. B. beim Strahlungshohlraum ohne weiteres eine nur endliche „Nullpunktsenergie“. Ferner ergeben sich auch sonstige Vorteile gegenüber grundsätzlichen, bislang unangreifbaren Problemen. Die Arbeit stellt insbesondere folgende Hypothese der Dichteverteilung zur Diskussion: die Dichte soll gegeben sein durch

$$g(p) = g_0 e^{-\pi \frac{p^2}{p_0^2}},$$

wo  $p_0$  eine von der Teilchenart abhängige Konstante ist. Es ergeben sich danach Gesichtspunkte für eine Inangriffnahme der Probleme des „Elektronenradius“ sowie für eine Begründung des Fürthschen Ansatzes für eine theoretische Ableitung des Massenverhältnisses von Proton und Elektron (in etwas abgeänderter Form).

*P. Jordan (Rostock).*

**Landau, L., und R. Peierls: Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie.** (*Phys. Inst., Eidgen. Techn. Hochsch., Zürich.*) *Z. Physik* **69**, 56—69 (1931).

Seitdem die bisherigen, ein mathematisch und begrifflich einheitliches System darstellenden Methoden der Quantenmechanik anscheinend an den äußersten Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit angelangt sind, ergibt sich das Problem, neue Gesichtspunkte zu finden, welche über die bisherige Theorie hinausführen. Als sicher darf dabei angesehen werden, daß die Schwierigkeiten eben dort wurzeln, wo Quantentheorie und Relativitätstheorie wesentlich ineinander greifen. Die vorliegende Arbeit begründet, von einer Diskussion des Messungsproblems in der relativistischen Quantentheorie ausgehend, die Ansicht der Verff., daß der Begriff der meßbaren Größe selber eine einschneidende Abänderung bzw. Beschränkung seiner Anwendungsmöglichkeit in der künftigen Theorie wird erfahren müssen; damit hängt zusammen, daß der ganze Formalismus der „Eigenfunktionen“ usw. seine Anwendbarkeit verlieren dürfte. Die neue Theorie wird nicht nur dem Umstand, daß grundsätzlich für jedes Experiment eine bestimmte endliche Zeitdauer nötig ist, nachdrücklicher als bisher Rechnung tragen müssen, sondern überdies im allgemeinen verzichten müssen auf Annahme der „Reproduzierbarkeit“ gewisser Experimente mit der Erwartung eines eindeutig voraussagbaren Ergebnisses. (Anders ausgedrückt: die Unterscheidung des „reinen Falles“ der quantenmechanischen Statistik vom „Gemenge“ scheint verloren zu gehen, indem es reine Fälle nicht mehr gibt). Eine empirische Stütze dieser Auffassungen erblicken die Verff. in der Tatsache, daß anscheinend für die  $\beta$ -Teilchen radioaktiver Elemente (diese  $\beta$ -Teilchen unterliegen in ausgesprochener Weise den relativistischen Gesetzen) das Gesetz der Energieerhaltung außer Kraft gesetzt ist. Im einzelnen bringt die Arbeit eine Reihe von Feststellungen über relativistische Unbestimmtheitsrelationen für die primitivsten Messungen an Elektronen, Lichtquanten oder elektromagnetischen Feldstärken. Die gesicherten Resultate der nichtrelativistischen Quantentheorie in Zusammenhang mit den Anforderungen der Relativität bedingen hier, wie schon von anderen Verff. in geringerem Umfang klargestellt war, gewisse Einschränkungen der Meßbarkeiten, welche tatsächlich bereits schärfer sind, als daß sie durch die bisherige systematische Theorie systematisch begründet werden könnten. *P. Jordan (Rostock).*

**Heisenberg, W.: Bemerkungen zur Strahlungstheorie.** *Ann. Physik*, **V. F. 9**, 338—346 (1931).

Die bisherige quantenmechanische Theorie der Absorption und Emission (oder Dispersion) von Strahlung durch Atome, wie man sie Dirac und den an seine Untersuchungen anschließenden Arbeiten verdankt, stützt sich auf die Quantelung der Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes unter Betrachtung der diesem Problem zugehörigen „Schrödingergleichung“, welche Eigenfunktionen und Eigenwerte in einem unendlichdimensionalen Raum untersucht. Diese mathematisch recht komplizierten Überlegungen lassen die korrespondenzmäßige Analogie zur klassischen Theorie weitgehend vermissen, obwohl die Ergebnisse natürlich den entsprechenden klassischen Formeln vollkommen analog sind. Die vorliegende Arbeit stellt nun den Anschluß an die anschaulichen Rechenmethoden wieder her, indem sie nicht mit den Eigenfunktionen im unendlichdimensionalen „Koordinatenraum“, sondern mit den — durch Matrizen dargestellten — Feldstärken selbst rechnet. Dabei werden die Gleichungen der klassischen Theorie, welche die Amplitudenänderungen der Materiewellen und der Lichtwellen unter Einfluß ihrer Wechselwirkung bestimmen, in der in Frage kommenden Näherung (höhere Näherungen sind zur Zeit

nicht bestimmbar wegen der bekannten grundsätzlichen Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik) vollkommen ungeändert erhalten, weil es sich durchweg um lineare Beziehungen handelt, in welchen die Nichtvertauschbarkeiten der Matrizen Größen noch keine Rolle spielen. Erst bei der Bestimmung der Intensitäten wird der nichtkommutative Charakter der physikalischen Größen wirksam, und behebt in durchsichtiger Weise die bekannten Schwierigkeiten, in welche sich früher die „Kontinuums-theorie“ der Wellenmechanik verwickelt hatte; die Grundpostulate der Bohrschen Theorie werden — ebenso, wie schon früher durch die Diracschen Ergebnisse, aber jetzt in viel durchsichtigerer Weise — quantenmechanisch bestätigt. *P. Jordan.*

**Dirac, P. A. M.: Note on the interpretation of the density matrix in the many-electron problem.** Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 240—243 (1931).

Bei einem Mehrelektronenproblem ohne Wechselwirkung der Elektronen, bei dem also die Gesamteigenfunktion aus den Eigenfunktionen ( $q/s$ ) der einzelnen Elektronen aufgebaut wird in Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} (q_1|1) & (q_1|2) & \dots & (q_1|n) \\ (q_2|1) & (q_2|2) & \dots & (q_2|n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q_n|1) & (q_n|2) & \dots & (q_n|n) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

läßt sich eine „Dichtematrix“ definieren durch

$$\varrho = (q'| \varrho | q'') = \sum_s (q'|s)(s|q''), \quad (2)$$

von der leicht zu sehen ist, daß aus ihr alle statistisch-physikalischen Aussagen ableitbar sein müssen, welche man andererseits direkt aus der Determinante (1) ableiten kann. Tatsächlich bedeutet

$$\begin{vmatrix} (q'| \varrho | q') & (q'| \varrho | q'') & \dots & (q'| \varrho | q^{(r)}) \\ (q''| \varrho | q') & (q''| \varrho | q'') & \dots & (q''| \varrho | q^{(r)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q^{(r)}| \varrho | q') & (q^{(r)}| \varrho | q'') & \dots & (q^{(r)}| \varrho | q^{(r)}) \end{vmatrix} \quad (3)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zugleich für  $r$  verschiedene von den  $n$  vorhandenen Elektronen die  $r$  Eigenwerte  $q', q'', \dots, q^{(r)}$  von  $q$  verwirklicht sind. Daß die Determinante (3) die dieser Aussage entsprechenden mathematischen Eigenschaften besitzt, kann unmittelbar aus der Eigenschaft  $\varrho^2 = \varrho$  der Determinante (2) abgeleitet werden.

*P. Jordan (Rostock).*

**Pidduck, F. B.: Electrical notes. III. The structure of electronic groups in wave-mechanics.** Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 78—80 (1931).

Diskussion und Begründung des bekannten Satzes, daß die Wirkung einer abgeschlossenen Elektronengruppe in einem Atom, soweit keine Austauschwirkungen in Frage kommen, durch ein geeignet gewähltes kugelsymmetrisches elektrostatisches Feld dargestellt werden kann.

*P. Jordan (Rostock).*

**Ludloff, H.: Zur Frage der Nullpunksentropie des festen Körpers vom Standpunkt der Quantenstatistik. I. Diskussion des experimentellen Materials über die Nullpunksentropie.** Z. Physik 68, 433—445 (1931).

Die Nullpunksentropie von festem Wasserstoff wird unter der Annahme berechnet, daß dieses eine feste Lösung von  $H_2^{\text{para}}$  und  $H_2^{\text{ortho}}$  bildet, welche dabei in Hinsicht ihrer Wechselwirkung als vollkommen äquivalent betrachtet werden. Das ergibt einen Wert  $\frac{1}{2} \lg 3 \cdot R$  pro Mol, was in gutem Einklang mit Messungen von Eucken steht. Außer diesem Falle und dem gewöhnlichen Falle von starken Wechselwirkungen, welche die Rotation verhindern und deswegen zum Werte Null (ohne Kernentartung) führen, wird noch ein Modell betrachtet, wo noch wegen des Kernaustausches die Kernspinentartung aufgehoben ist, aber dennoch die Ortho- und Paramoleküle voll-

kommen äquivalent bleiben; die Möglichkeit einer solchen Struktur, die der Verf.  $\text{Cl}_2$  und  $\text{Br}_2$  zuschreibt, wird nicht weiter begründet. *L. Landau* (Leningrad).

**Ludloff, H.:** Zur Frage der Nullpunksentropie des festen Körpers vom Standpunkt der Quantenstatistik. II. Die Formeln für die Entropie des festen Körpers in der Fermi-statistik. *Z. Physik* 68, 446—459 (1931).

Die Quantenstatistik wird auf ein Modell angewandt, das aus nicht wechselwirkenden Teilen besteht, welchen mehrere Energieniveaus zugeordnet werden, wobei auch der Fall von Wechselwirkungen innerhalb eines Elementarteils untersucht wird. Der physikalische Sinn des Modells wird nicht diskutiert. *L. Landau* (Leningrad).

**Fischer, Johann:** Beiträge zur Theorie der Absorption von Röntgenstrahlen. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Zürich.*) *Ann. Physik*, V. F. 8, 821—850 (1931).

Der Verf. berechnet den Photoeffekt eines wasserstoffähnlichen Atoms für den Fall, daß die Lichtfrequenz nur der Bedingung  $h\nu \ll mc^2$  genügt und nicht etwa noch die Bedingung Wellenlänge groß gegen Atomradius erfüllt wird. Die Rechnung wird mit Hilfe der Separierung in parabolischen Koordinaten durchgeführt. Dabei ergibt sich in der angenommenen Näherung (bis auf Glieder von der Größenordnung  $v^2/c^2$ ) für den Gesamteffekt die von Nishina und Rabi ohne Berücksichtigung der Retardierung der Lichtwelle abgeleitete Formel und für die Richtungsverteilung von  $K$  Elektronen das Wentzelsche  $\cos^2\vartheta$ -Gesetz mit dem Sommerfeld-Schurschen Korrektionsfaktor  $1 + 4v/c \cos\varphi$  ( $\varphi$  Winkel mit der Lichtrichtung). In derselben Weise wird auch die Absorption in der  $L$ -Schale berechnet. Die Meßresultate stimmen mit den Formeln am besten bei Einsetzung von unabgeschirmten Werten der Kernladung überein, was bei großer Geschwindigkeit von auslaufenden Elektronen auch zu erwarten wäre.

*Landau* (Leningrad).

**Hund, F.:** Bericht über die Bezeichnung von Linien und Termen in Atom- und Molekelspektren. *Z. Astrophys.* 2, 217—242 (1931).

Zweck des Berichtes ist, auf die in den letzten Jahren durch internationale Übereinkunft festgelegten Bezeichnungen für die Terme und Linien in Atom- und Molekülspektren auch in der deutschen Literatur noch einmal aufmerksam zu machen. Im Gegensatz zu den in englischer Sprache erschienenen Berichten von Russell, Shentstone und Turner und von Mulliken wird hier die physikalische Bedeutung der eingeführten Symbole und die daraus entspringende Begrenzung bei ihrer Verwendung ausführlich erörtert, was namentlich bei den Molekülspektren mit ihren verschiedenartigen Koppelungsverhältnissen von großer Wichtigkeit ist. Der Referent schließt sich den Herausgebern der Zeitschrift für Astrophysik an, auf eine allgemeine Benutzung der vereinbarten Bezeichnungsweise, auch in den Grenzgebieten der Physik, hinzuwirken.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Goudsmit, S.:** Theory of hyperfine structure separations. (*Dep. of Phys., Univ. of Michigan, Ann Arbor.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 663—681 (1931).

Es wird die Wechselwirkung zwischen Kernspin und mehreren Elektronen berechnet. Für die Wechselwirkungsenergie zwischen Kernspin und einem Elektron wird der bekannte Ausdruck

$$a[I l \cos(I, l) - I s \cos(I, l) + 3 I s \cos(I, r) \cos(r, s)]$$

angenommen. (Hierbei bedeutet  $I$  den Kernspin,  $s$  den Elektronenspin,  $l$  das Bahnmoment des Elektrons,  $r$  den Vektor vom Kern zum Elektron und  $a$  die Größe der Kopplung.) Es wird nun mit Hilfe des Summensatzes die bekannte Formel für Wechselwirkung eines Elektrons mit dem Kernspin abgeleitet. Dann werden einige Beziehungen für den Fall von mehreren Elektronen abgeleitet. Zur Aufstellung des vollständigen Niveauschemas muß man aber noch Voraussetzungen über die Kopplung der Elektronen untereinander machen. Es werden dann die beiden extremen Kopplungsfälle untersucht: 1. Die  $l$ - und  $s$ -Vektoren der einzelnen Elektronen werden zuerst zu einem Vektor  $j$  gekoppelt. 2. Es werden zuerst die Vektoren  $s$  der verschiedenen Elektronen

zu einem Vektor  $S$  und die  $L$ -Vektoren zu  $L$  gekoppelt. Die Methode der Rechnung ist wiederholte Anwendung des Summensatzes. Nur bei dem 2. Kopplungsfall reicht dies nicht vollständig aus und es wird eine Methode von Darwin benützt, indem die Wirkung der Elektronen durch die Wirkung eines Elektrons mit dem Bahnimpuls  $L$  und dem Spin  $S$  ersetzt wird. Die experimentellen Daten sind meistens zu ungenau, um einen Vergleich mit der Theorie zu erlauben, aber bei Wismut und Thallium bestehen Unstimmigkeiten, die außerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nach einer Bemerkung von Breit ist dies darauf zurückzuführen, daß die Wellenfunktion für  $p_{\frac{1}{2}}$  Elektronen für  $r = 0$  nicht verschwindet.

*E. Teller (Göttingen).*

**Inglis, David R.: Hyperfine structure as a test of a linear wave equation in the two-body problem.** *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 795—799 (1931).

Es wird die Wechselwirkung eines Korns (mit dem Spinnmoment  $\frac{1}{2}$ ) mit einem Elektron berechnet. Dabei werden Terme berücksichtigt, welche man durch formale Verallgemeinerung der Dirac-Gleichung auf das Zweikörperproblem erhalten kann und die (nach der Berechnung von Breit) bei dem Heliumtriplet sich als unrichtig herausgestellt haben. Die Resultate werden versuchsweise auf den Fall Kernmoment  $> \frac{1}{2}$  verallgemeinert. Die so erhaltene Formel ist ebensowenig geeignet, die Wismut- und Thallium-Hyperfeinstruktur wiederzugeben wie die frühere Theorie (ohne die Zusatzglieder).

*E. Teller (Göttingen).*

**Saha, M., und A. C. Banerji: Über die Verteilung der Intensität unter die Feinstrukturkomponenten der Serienlinien des Wasserstoffs und des ionisierten Heliums nach der Diracschen Elektronentheorie.** *Z. Physik* **68**, 704—720 (1931).

Es wird die Intensität der Feinstrukturkomponenten von  $H_{\alpha}$  und von der  $He^{+}$ -Linie  $\lambda$  4686 nach der Diracschen Theorie berechnet. Die Ergebnisse (die mit den von Sommerfeld, Unsöld und Bechert berechneten Werten übereinstimmen) stehen mit den experimentellen Daten im Einklang.

*E. Teller (Göttingen).*

**Eyring, H., und M. Polanyi: Über einfache Gasreaktionen.** (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Phys. Chem. u. Elektrochem., Berlin-Dahlem.*) *Z. Physik. Chem. B* **12**, 279—311 (1931).

Es wird die Londonsche Theorie der Aktivierungsenergie (A.E.) adiabatischer Reaktionen mit weniger Vernachlässigungen als bisher für einige einfache Reaktionen ( $H + H_2^{\text{para}} = H_2^{\text{ortho}} + H$ );  $H + HBr = H_2 + Br$ ;  $H + Br_2 = HBr + Br$ ) durchgeführt. Diese Theorie berechnet die Energie in  $S$ -Zuständen befindlicher Atome in Abhängigkeit von ihrer räumlichen Anordnung auf Grund des Heitler-London-Verfahrens. Die Energie setzt sich additiv zusammen aus der Coulombschen Wechselwirkung der ungestörten Atome und einem Ausdruck, der wegen der Vernachlässigung der Nichtorthogonalität der Eigenfunktionen verschiedener Atome nur die Austauschintegrale (A.I.) von Atompaaren enthält. Coulombsche Energie und A.I. sind Funktionen der Abstände. Man erhält eine Energiefläche über einem Raum von so viel Dimensionen, als Parameter zur Festlegung der relativen Lage der Atome notwendig sind. Minima dieser Flächen entsprechen Ausgangs- bzw. Endzuständen chemischer Reaktionen. Die Höhe des niedrigsten Sattels, gemessen vom Ausgangszustand aus, ist die A.E. London zeigte, daß es bei Reaktionen dreier Atome genügt, die Energie für geradlinige Anordnung zu untersuchen, d. h. den zu betrachtenden Raum auf zwei Dimensionen zu reduzieren, da sich hierfür die geringste A.E. ergibt. Die Erweiterung gegenüber London besteht darin, daß die Coulombsche Energie und A.I. der entfernteren Atome nicht vernachlässigt werden. Letzteres liefert einen wesentlichen positiven Beitrag zur A.E., während erstere im Sinne einer Verminderung wirkt. Ferner wird die Nullpunktsenergie der Kernschwingungen berücksichtigt, die fast vollständig für die Aktivierung ausgenutzt wird. Die Energien für die Atompaare als Funktionen der Abstände werden mit Hilfe der bekannten Werte für Dissoziationsarbeit, Gleichgewichtsabstand und Anharmonizität der Bindung durch die Morsesche Formel dargestellt. Zunächst wird diese Gesamtenergie als Austauschenergie behandelt und andererseits die Coulombsche Energie in der Londonschen Formel vernachlässigt.

Das führt zu zu hohen Energien. Die Energieflächen werden für die 3 Reaktionen durch Niveaulinien dargestellt. Im Falle dreier H-Atome wird eingehender diskutiert, welchen Einfluß die Behandlung der Gesamtenergie als Austauschenergie und die gleichzeitige Fortlassung der Coulombschen Energie auf das Resultat hat. Hierzu wird aus der empirischen Energiekurve für  $H_2$  das A.I. durch Subtraktion des von Sugiura berechneten Coulombschen Anteils bestimmt. Es ergibt sich starke Abflachung des Energiesattels gegenüber dem ersten Verfahren (19 kcal gegenüber 30 kcal; Abzug der Nullpunktsenergie von 6 kcal ergibt 13 kcal als A.E.; experimentell ist sie nach Farkas 4 bis 11 kcal). Die kleinen Werte der A.E., die die adiabatische Auffassung des Reaktionsverlaufs in Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt, werden als Stütze für diese Auffassung angesehen. Zum Schluß wird die Dynamik der Reaktionen diskutiert. Der zeitliche Ablauf der Umsetzung läßt sich beschreiben durch die Horizontalkomponente der Bewegung einer über das Potentialgebirge unter dem Einfluß der Schwerkraft rollenden Kugel. Dabei ist es allerdings notwendig, das Potentialfeld in einem schiefwinkligen Koordinatensystem mit verschiedenen Koordinatenmaßstäben darzustellen. Winkel und Maßstabsverhältnis sind in bestimmter Weise durch die Atommassen gegeben. Die Betrachtung der Kugelbewegung gestattet zu erkennen, ob zur Aktivierung wesentlich die Zufuhr von Translations- oder Schwingungsenergie notwendig ist. Eine ins einzelne gehende Diskussion erscheint mangels experimenteller Daten verfrüht. Doch zeigt sich, daß hauptsächlich Schwingungsenergie notwendig ist, wenn der Anteil der A.E. von den äußeren Atomen klein ist, was im Einklang mit Beobachtungen der starken Lichtausbeute der Chemiluminiszenz gewisser exothermer Atomreaktionen ist.

*E. Hückel (Stuttgart).*

**Planck, Max:** Über die Grenzschicht verdünnter Elektrolyte. (II. Mitt.) Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 6/7, 113—122 (1931).

Henderson hat für die Potentialdifferenz zwischen zwei unendlich verdünnten Lösungen binärer einwertiger Elektrolyte aus der Nernstschen Theorie der Elektrizitäts-erregung in Elektrolyten eine Formel abgeleitet, die durch Messung dieser Potentialdifferenz bestätigt worden ist. Die Formel beruht auf der Annahme, daß die Ionenkonzentrationen im Elektrolyten linear von  $x$  abhängen;  $x$  mißt dabei den Abstand einer Stelle in der Grenzschicht (zwischen beiden Elektrolyten) von einer Begrenzungsfläche der Grenzschicht. Diese Annahme hat zur Folge, daß die Lösung in der Grenzschicht den Charakter einer Mischung aus den beiden Elektrolyten besitzt. Planck hatte früher [Wied. Ann. 40, 561 (1890)] den Ansatz gemacht, daß die Beschaffenheit der Grenzschicht stationär ist, d. h. daß sämtliche Ionenkonzentrationen sich zeitlich nicht ändern. Wenn man Konvektionsströme in der Lösung (experimentell) vermeidet, so muß der Zustand der Grenzschicht im Laufe der Zeit in diesen stationären (Planckschen) Zustand übergehen, d. h. der Hendersonsche Ausdruck muß in den Planckschen übergehen. An Beispielen wird gezeigt, daß die zeitliche Änderung des Hendersonschen Potentialausdrucks mit dieser Erwartung nicht übereinstimmt, wenn man seinen Ansatz linearer Abhängigkeit von  $x$  beibehält. Der lineare Ansatz ist also zu verwerfen. Planck ersetzt ihn durch einen Ansatz, der für den Zustand in der Grenzschicht ebenfalls den Charakter einer Mischung gibt, aber eine allgemeinere Abhängigkeit von  $x$  zeigt. Diese Abhängigkeit muß dem Zustand der Lösung nach dem Zusammenbringen der Elektrolyte vor dem stationären Zustand entsprechen. In Analogie zum Verhalten von Gasmischungen wird angenommen, daß sich zunächst nur die Gesamtkonzentration ausgleicht, d. h. zeitunabhängig wird. Dann läßt sich die gesuchte Abhängigkeit von  $x$  berechnen. Sie liefert ebenfalls die Hendersonsche Formel, ist aber dem vorhin genannten Einwand nicht ausgesetzt. *K. Bechert (München).*

**Hill, E. L.:** A problem in the quantum mechanics of crystals. Physic. Rev., II. s. 37, 785—794 (1931).

Der Verf. untersucht die Elektronenbewegung in einem periodisch 2 verschiedene Werte annehmenden eindimensionalen Potentialfeld. Dabei ergeben sich entsprechend

den bekannten Vorstellungen getrennte Systeme von Eigenwerten. Hat das einfallende Elektron einen der Zwischenwerte der Energie, so wird es vollständig reflektiert. Der Verf. interpretiert diese Reflexion als eine der Bragg'schen Bedingung entsprechende.

*L. Landau (Leningrad).*

**Rusterholz, Alexander:** Die Streuung von Röntgenstrahlen an Metallen. (*Phys. Inst., Eidgen. Techn. Hochsch., Zürich.*) *Helvet. phys. Acta* 4, 68—121 (1931).

Es wird eine Übersicht der theoretischen Formeln für die Streuung der Röntgenstrahlen an Atomen und Krystallen gegeben. Für die Streuung an einem zylinderförmigen Stäbchen wird auch die Rolle der Absorption der Primär- und Sekundärstrahlen untersucht, was im allgemeinen Fall zu nur numerisch auswertbaren Integralen führt. Der Fall von einem genügend dicken, vollkommen absorbierenden Stäbchen läßt sich dagegen streng auswerten. Für diesen Fall wird auch die Streuung eines divergierenden Bündels behandelt. Die vom Verf. durchgeführten Versuche werden dann mit der Theorie verglichen, was zu einer guten Übereinstimmung, sogar mit dem einfachen Thomas-Fermi-Modell führt.

*L. Landau (Leningrad).*

**Goldstein, L.:** Sur la mécanique quantique des choes atomiques. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 1022—1024 (1931).

In einer vorläufigen Mitteilung versucht der Verf. die Bornsche Stoßtheorie auf Stöße zwischen 2 Atomen anzuwenden. In einer späteren Arbeit soll die Reaktionsgeschwindigkeit als Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Zustand — 2 freie Atome — in den Zustand — 1 Molekül — berechnet werden.

*G. Rumer (Göttingen).*

**Kikuchi, Seishi:** Zur Theorie des Comptoneffektes. *Z. Physik* 68, 803—812 (1931).

Der Comptoneffekt wird quantenelektrodynamisch behandelt, und es wird gezeigt, daß die ursprüngliche anschauliche Vorstellung Comptons vom Zusammenstoß zweier elastischer Korpuskel beim einzelnen Prozeß innerhalb der Unbestimmtheitsrelation zu Recht besteht, insbesondere in bezug auf die Gleichzeitigkeit des gestreuten Lichtquants und des Rückstoßelektrons.

*Waller (Upsala).*

**Mendenhall, C. E.:** Recent developments in photoelectricity. *Science (N. Y.)* 1931 I, 107—113.

## Astronomie und Astrophysik.

**Stumpff, K.:** Untersuchungen über die Verteilung der kleinen Planeten in Länge. *Astron. Nachr.* 242, 33—48 (1931).

Anknüpfend an eine Arbeit von A. Klose über die Struktur des Planetoidensystems (Mitt. a. d. Inst. f. theor. Astronomie zu Riga Nr 2) untersucht der Verf. die Verteilung der kleinen Planeten in Länge. Er behandelt insbesondere die Frage, ob die Verdichtungen (die Knoten) der Verteilungskurve sich regellos oder nach einem bestimmten Gesetz verändern. Das Zahlenmaterial — die mittleren Bewegungen aus den oskulierenden Elementen für 1925.0 — wird der Arbeit von Klose entnommen. Es ergibt sich, daß die Genauigkeit, mit der die mittleren Bewegungen bekannt sind, für einen Zeitraum von mehreren Jahrhunderten genügt. Die Verteilung der  $N$  Planetoiden ist eine Funktion der Zeit und der  $2N$  Parameter  $l_\nu$  (mittlere Längen),  $\mu_\nu$  (mittlere Bewegungen);  $\nu = 1, 2, \dots, N$ . Sie wird durch eine Fouriersche Reihe dargestellt. Zeigt zur Zeit  $t=0$  die Verteilungsfunktion eine Verdichtung in der Richtung  $l_m$ , deren Achse sich mit der Geschwindigkeit  $\mu_m$  bewegt, so haben die Konstituenten des ersten Gliedes der Entwicklung die Gestalt

$$a_1(t) = c_m(t) \cos[l_m + \mu_m(t) \cdot t],$$

$$b_1(t) = c_m(t) \sin[l_m + \mu_m(t) \cdot t],$$

wobei es sich um die Bestimmung der zeitlichen Veränderung von  $c_m$ ,  $l_m$  und  $\mu_m$  handelt. Die Funktion  $a_1(t)$ , auf welche sich die weitere Untersuchung beschränkt, wird ihrerseits in eine Fouriersche Reihe entwickelt. Es ergibt sich, daß für  $\omega_1 = 770''$  und  $\omega_2 = 1070''$  (mit  $\omega$  werden die äquidistanten Fourierfrequenzen bezeichnet) die Verteilungskurve besonders bemerkenswerte Knotenbildungen zeigt. Es folgt weiter, daß

die Knoten, deren Entstehung und Zerfall zu mehreren, um etwa 100 Jahre auseinanderliegenden Epochen untersucht wurde, im Laufe eines Jupiterumlaufs einmal in Konjunktion und einmal in Opposition zueinander kommen. Die Konjunktionen treffen dann ein, wenn Jupiter im Perihel steht. Es wird vorbehalten, ob es sich hier um einen reinen Zufall oder eine Gesetzmäßigkeit handelt. *L. Hufnagel* (Berlin).

**Boneff, N.: Eine neue Methode zur angenäherten Zeitbestimmung bei kleinen Mondhöhen.** *Astron. Nachr.* **242**, 217—224 (1931).

Es handelt sich um den speziellen Fall, bei dem man an einem Ort von bekannter geographischer Lage die lokale, wahre Sonnenzeit sucht, vorausgesetzt, daß die Sonne unter dem Horizont ist und daß dem Beobachter keine Instrumente, mit Ausnahme eines Winkelmeßinstrumentes und keine astronomischen Jahrbücher zur Verfügung stehen.

*Autoreferat.*

**Mineur, Henri: Remarques à propos de la mécanique des masses variables.** *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1082—1083 (1931).

Nach einigen Bemerkungen über eine eigene Arbeit (vgl. dies. Zbl. **1**, 246) und eine von Levi-Civita [*Rend. dei Lincei*, 6. Serie, **8**, IX, 329 (1928)] über den Gegenstand der vorliegenden Note, teilt der Verf. kurz die Resultate einiger Rechnungen mit über die Bewegung von  $n$  einander störenden Planeten im Felde einer überwiegenden, aber mit der Zeit veränderlichen Zentralmasse. Das wesentliche Resultat ist, daß die großen Achsen der Planetenbahnen gleichzeitig mit den Exzentrizitäten wachsen, wenn die Zentralmasse abnimmt.

*O. Heckmann* (Göttingen).

**Mineur, H., Varchon, Barbier, Canavaggia, Chevallier et Roumens: Sur les mouvements d'ensemble des étoiles.** *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1357—1360 (1931).

● **Shapley: Star clusters.** London: McGraw-Hill publ. Co., Ltd. 1931, XI, 276 S. u. 16 Abb., 15/-.

More than fifteen years elapsed since H. Shapley published his well known investigations of star clusters based on the observations made at Mount Wilson Observatory. These studies enormously enlarged our knowledge of the galactic system its general properties and dimensions. In subsequent years S.s scheme of galactic system safely passed undamaged through a rather severe criticism raised by some prominent astronomers. But S. himself considered his Mount Wilson results only as preliminary, subject to alterations and revisions in next future. For last ten years he has carried on some extensive studies of star clusters from astrophysical and statistical points of view, basing on rich photographic material collected at Harvard Observatory (in collaboration with Miss Cannon, Miss Sawyer and other members of staff). The book under review represents the results of this work, which nearly doubled the data available in 1917. The monograph deals with the following questions relating to star clusters: general properties, spectral composition, variable stars, distribution of the ordinary stars, form and structure of galactic groups, transparency of space, period luminosity curve, distances, dimensions of the Galaxy, Magellanic clouds, origin of the Galaxy. The material and its discussion is amply illustrated by diagrams and tables and supplemented by valuable catalogue of globular and galactic clusters and an extensive bibliography. Taken as a whole the new results do not imply any drastic changes of the early S.s scheme. S. adopts a rather conservative correction — 0,23 to zero point of the preliminary period — luminosity curve of Cepheid variables, what amounts to a systematical decrease of 11% in the previously computed distances. Local system, which played such a prominent rôle in S.s early scheme became now only a matter for a few remarks. There was one big difficulty with the early S.s theory, that is now avoided or resolved its incompleteness in leaving the spiral nebulae out of the picture. This gap is now filled by „Super-Galaxy“ hypothesis, proposed by S. two years ago and discussed in the book under review. This hypothesis is based on recent studies of the clusters of anagalactic nebulae (f. i. Coma-Virgo group). S. considers galactic system as a cluster of anagalactic nebulae and isolated galactic clouds as its separate members; galactic system is considered therefore as a real „Super-Galaxy“. The monograph contains very rich material, which can be used by theoretical astronomers for various researches. S. explicitly avoids mathematical method of reasoning, dynamical questions (f. i. galactic rotation) are only indicated, but not discussed in the monograph.

*B. P. Gerasimovic.*

**Slouka, Hubert: Bestimmung des Krümmungsradius des Weltraumes aus radialen Geschwindigkeiten der Kugelsternhaufen.** *Čas. mat. a fys.* **60**, 225—230 (1931) [Tschechisch].

L'auteur donne une nouvelle détermination du rayon de l'Univers de de Sitter au moyen de la formule de Silberstein en tenant compte des mesures les plus récentes

des distances des amas globulaires, publiées dans la monographie de Shapley „Star Clusters“.

*Autoreferat.*

**Russell, H. N., and R. d'E. Atkinson: Stellar structure.** Nature (Lond.) 1931 I, 661—662.

Nach Ansicht der Verff. sind die Zentralsterne der planetarischen Nebel „weiße Zwerge“. Die mittlere Dichte der Zentralsterne wird nach den besten Daten für Temperatur, Parallaxe und Masse zu  $10^6$ — $10^7$  g cm<sup>-3</sup> geschätzt, doch enthält das gegebene Beispiel einen Rechenfehler; die richtige Rechnung ergibt etwa 20000 g cm<sup>-3</sup>! Vermutungsweise bilden die Zentralsterne das obere Ende einer „Reihe“ von weißen Zwergen, die im Hertzsprung-Russell-Diagramm der „Hauptreihe“ ungefähr parallel läuft. Zur Deckung der geringen Ausstrahlung dieser Sterne genügt der Energiegewinn durch Kontraktion.

*R. Wildt (Göttingen).*

**Kienle, H.: Das Temperaturproblem in der Astrophysik.** Naturwiss. 1931 I, 349—354.

The effective temperature of a star can be defined (a) by the energy emitted per unit area for certain wave-lengths or for the whole spectrum compared with that for a black body (b) by the relative energy distribution in the spectrum, giving the „colour“ temperature. For a black-body at temperature  $T$ , giving intensity  $J$  for wave length  $\lambda$ , the graph of  $\log J$  and  $1/\lambda$  is a straight line (Wien's law) with gradient proportional to  $T$ . For a star a „Gradationstemperatur“ is defined by the slope of the corresponding graph at any point. This is one type of „colour“ temperature. The author suggests two questions prompted by a study of these effective temperatures. 1. To what approximation can a star's radiation be replaced by black-body radiation for a certain temperature? 2. What significance is to be attached to the departure from a Planck curve? Absolute bolometric magnitudes are calculated on the assumption that the unobserved parts of a star's radiation follow a Planck curve. Colour equivalents are calculated by assuming the energy curve has the form for a black-body, giving temperatures which form a basis of much of our knowledge of stellar diameters and densities, in spite of known cases of abnormal colour. Such temperatures are also employed in the study of novae, although much of the radiation may come from emission bands. Stellar spectra may also be distorted by absorption in space. From these facts the author shows the importance of an empirical comparison of the properties of stellar radiation and black-body radiation. He points out that absolute measurements exist only for the sun, and they show that its mean radiation cannot be correlated to that of a black-body for a unique temperature. Further Abbot's latest stellar observations do not yet admit of the definition of any „temperature“. Brill has discussed the depression in the violet in stellar spectra, and Sampson has concluded that the stellar photosphere does not in general radiate like a black-body. Hence the author concludes that the colour-index, temperature, and spectral-type can be taken as equivalent only with extreme caution. He mentions in passing the importance of spectral energy curves in the theory of stellar atmospheres, particularly in the comparison of giants and dwarfs. The author considers that in the present state of the problem of effective temperatures only „colour“ temperatures can be determined. This depends on our general ignorance of the absolute dimensions of the radiating surface, so that we cannot distinguish between „black“ and „gray“ radiation. He then shows how the colour temperature or „Gradationstemperatur“ is determined in practice. The problem is divided into the comparison of the stars amongst themselves, and then the comparison with an absolute standard. He considers the possibilities of taking as standard a laboratory source, the sun, standard stars of assumed behaviour, or standard stars for which absolute measurements may be possible. He proceeds to discuss the programs of observations of fundamental systems of stars being carried out at Greenwich and Göttingen. The data he regards as requisite for each star of the systems are: 1. The mean apparent magnitude for the mean wave-length, referred to a normal star. 2. The mean gradient of the energy curve for this wave-

length. 3. The departure of the observed energy distribution from the linear form. He concludes by noting the necessity of knowing the sensitivity function for all the apparatus used.

W. H. McCrea (Edinburgh).

**Gunn, Ross: The electrical state of the sun.** (*Naval Research Labor., Washington.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 983—989 (1931).

By calculating the magnetic effects which would be produced by the rotation of the galaxy the author shows that some previous hypotheses on the electrical charges thrown off by the stars must be abandoned. He concludes that the net charge on a typical star cannot exceed one coulomb. Using his previous work on the drift velocities in the solar atmosphere, he calculates the electric fields, space charge and potentials. He finds for a typical region of the reversing layer a radial field (inwards) of 0,015 volt  $\text{cm}^{-1}$ , and a total negative surface charge of  $3 \times 10^9$  e. m. u. He discusses the maintenance of this field.

W. H. McCrea (Edinburgh).

**Minnaert, M., und G. F. W. Mulders: Dopplereffekt und Dämpfung bei den Fraunhoferischen Linien.** (*Phys. Labor., Heliophys. Inst., Univ. Utrecht.*) *Z. Astrophys.* 2, 165—181 (1931).

In früheren Arbeiten hatten die Verff. empirisch die totale in den Fraunhoferlinien absorbierte Energie  $I$  als Funktion der Anzahl  $N$  der wirksamen Resonatoren bestimmt. Sie stützten sich dabei auf die Eichung der Rowlandsskala durch Russell und Adams (Rowland-Intensität  $R$  als Funktion der Resonatoranzahl  $N$ ). Die Verff. deuten nun den Verlauf dieser Funktion auf Grund einer Arbeit von Schütz [*Z. Astrophys.* 1, 300 (1930)] durch das Zusammenwirken von Dopplereffekt und Dämpfung, wobei offen bleibt, ob außer der Strahlungsdämpfung noch andere Arten von Dämpfung wirksam sind. Bei geringer Anzahl der Resonatoren ist die Linienbreite (und die absorbierte Totalintensität) durch den Dopplereffekt bestimmt, bei großer Anzahl durch die Dämpfung. Aus den Grenzwerten für große und kleine Intensitäten berechnen die Verff.  $N$  und die Dämpfungskonstante  $\omega$ ; diese ist 10mal größer als der nach der klassischen Theorie zu erwartende Wert. Die Verff. ändern die quantenmechanische Theorie der Strahlungsdämpfung von Weisskopf und Wigner, die nur bei der Strahlungsdichte null gilt, für den Fall höherer Strahlungsdichte in der Sonnenatmosphäre ab und zeigen, daß die wirkliche Strahlungsdämpfung für das grüne und ultraviolette Mg-Triplett das 4,5- und 2,9-fache der klassischen ist. Die Eichkurve  $R = f(N)$  von Russell und Adams und die daraus abgeleitete Funktion  $I = f(N)$  der Verff. bezieht sich auf einen mittleren Wert der Dämpfung der durch die Fraunhoferlinien mittlerer Intensität charakterisiert ist.

R. Wildt (Göttingen).

**Unsöld, A.: Astrophysikalische Anwendung und Prüfung der Quantentheorie der natürlichen Linienbreite.** (*Inst. f. Theor. Phys., Univ. Hamburg.*) *Z. Astrophys.* 2, 199—208 (1931).

According to Weisskopf and Wigner the classical value  $\gamma/2\pi$  of the natural half-width of a spectral line is to be replaced by  $(\sum \gamma_A + \sum \gamma_B)/2\pi$ , involving the sum of the probabilities of all transitions from the upper and lower levels involved. This introduces a difference from the older quantum theory in the case of non-resonance lines. The author shows that the Balmer lines of hydrogen,  $H_\alpha$  and  $H_\beta$ , in stellar and solar spectra should provide a good test of the theory. He employs some recent solar observations of his own, which he describes. Using an argument due to Schwarzschild he shows that the pressure effect on a line can be separated from the natural width by comparing the spectrum of the centre of the sun's disc with that near its limb. The observed line contour is compared with the theoretical. The latter is calculated using the transition probabilities computed by F. G. Slack and the author's own value for the number of hydrogen atoms involved, obtained by an independent method. The theory is well confirmed. Finally he gives the effect of the new theory on the interpretation of his former measurements of the  $H + K$  and  $X$  lines of ionised calcium,  $\text{Ca}^+$ .

W. H. McCrea (Edinburgh).

**Lemaître, G.:** The beginning of the world from the point of view of quantum theory. *Nature* (Lond.) 1931 I, 706.

The author starts with the principles that in the universe there is a constant total energy distributed in discrete quanta and that the total number of quanta is ever increasing. Going back sufficiently far in time we should therefore tend to reach a stage when all the energy was associated with a few quanta, or possibly a single quantum. Space and time being however statistical conceptions they lose their meaning when used to deal with only a few quanta. So the author suggests a beginning of the universe with a single quantum before the beginning of space and time, which acquired significance only when this quantum had divided into a large enough number of smaller ones. He considers that there need be nothing about the initial quantum which would determine the subsequent evolution of the universe. *W. H. McCrea* (Edinburgh).

**Białobrzęski, Cz.:** Quatre aspects du mécanisme du rayonnement des étoiles. *Bull. internat. Acad. polon. Sci., Cl. Sci. math. et nat. A.* 3, 1—15 (1931).

Es wird der Mechanismus der Strahlungsübertragung vom Sterninneren nach außen von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet. Voran geht die klassische Behandlungsweise, die sich mit der Strahlung als einem kontinuierlichen, vom Sterninneren nach außen im Sinne des Temperaturgradienten fließenden Energiestrom beschäftigt. Vom korpuskulartheoretischen Standpunkt aus ist jede Strahlung aus Photonen zusammengesetzt. Eine Untersuchung der Bewegung der Photone im Sterninneren und ihres Weges von innen nach außen — eine Untersuchung, die in mancherlei Hinsicht an die Theorie der Brownschen Bewegung erinnert — bildet den wesentlichsten Teil der Arbeit. Sie zeigt u. a., daß die Bedingungen an der Sternoberfläche entgegen den Einwänden Milnes entsprechend den Anschauungen Eddingtons von nur untergeordneter Bedeutung für die austretende Strahlung sind. Die austretende Strahlung läßt sich weiter direkt in Beziehungen bringen zu den Energiequellen im Sterninneren unter Weglassung der Vorgänge im Stern. Dieser Gesichtspunkt bringt aber wegen unserer Unkenntnis über die Natur der Energiequellen nichts Neues. Schließlich kann man die Strahlung noch entstanden denken durch Abweichungen des Sternzustandes vom thermodynamischen Gleichgewicht. *Brück.*

**La Rosa, M.:** Nuova prova dell'influenza del moto della sorgente sulla velocità della luce. *Spiegazione balistica della legge di Miss Leavitt. Nota I.* *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. 13, 399—404 (1931).

**Unsöld, A.:** Konvektion in der Sonnenatmosphäre. II. Zur Thermodynamik der Sonnenflecke. *Z. Astrophys.* 2, 209—213 (1931).

The temperature difference between a sun-spot and its surroundings can be accounted for by supposing it to consist of gas rising from some depth in the atmosphere and being cooled by adiabatic expansion. An upper limit to the amount of this cooling can be calculated on the basis of the thermodynamics of the atmosphere considered in Part I of this work, without arbitrary assumptions about the depth from which the gases rise. The author works on the hypothesis that the gas is mainly hydrogen, and plots its isothermals, i.e. entropy ( $S$ )—pressure ( $P$ ) curves, allowing for ionisation. In the same diagram he exhibits the relation between  $S$  and  $P$  holding throughout the atmosphere, derived from Part I with an assumed value of the absorption coefficient  $k$ . The latter curve ( $C$ ) possesses a minimum  $M_1$  and a maximum  $M_2$ . The cooling undergone by gas rising from a given level is obtained by drawing the adiabatic line through the corresponding point on the curve  $C$  and finding the isothermal which it intersects at the pressure corresponding to the (apparent) surface of the sun. The lowest temperature attainable is given by the adiabatic through  $M_1$ . It is found to be about  $1400^\circ\text{K}$  below the normal surface temperature, and is not sensitive to the value assumed for  $k$ . It agrees well with the observed value of about  $1200^\circ\text{K}$ . A possible explanation of the fact that this is nearly the same for all spots, and is near the theoretical upper limit, is that spot vortices are most likely to arise at the upper boundary of the convection zone, which does in fact correspond to  $M_1$ . *W. H. McCrea* (Edinburgh).